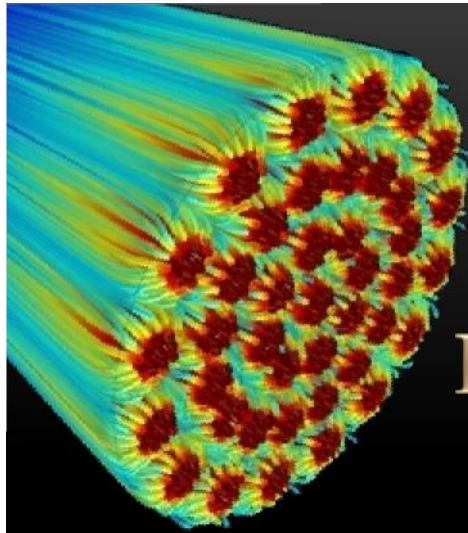




VNIVERSITAT
ED VALÈNCIA



Master & Doctorate Course: Introduction to COMSOL Multiphysics

Begin/End Dates: 2015 June 23-24

Schedule: 10:00-13:00 and 15:00-18:00

Location: Department of Optics and Optometry and Visicon Science. Seminar Room

Registration: <http://www.addlink.es/eventos/comsol/curso-introduccion-comsol-multiphysics-1506>
Course Instructors: **Juan J. Miret Mari and Mahin Naserpour**
Course Coordinator: **Carlos J. Zapata Rodríguez (carlos.zapata@uv.es)**

Detailed Course Topics:

1. Introduction to the Finite Element Method: mathematical foundations
2. Getting started with COMSOL Multiphysics: user interface
3. Creating a model with COMSOL Multiphysics: model based on equations
4. Using the Radio-Frequency module:
 - I. 2D modeling of various problems
 - II. 3D modeling of various problems

SPONSORED BY:

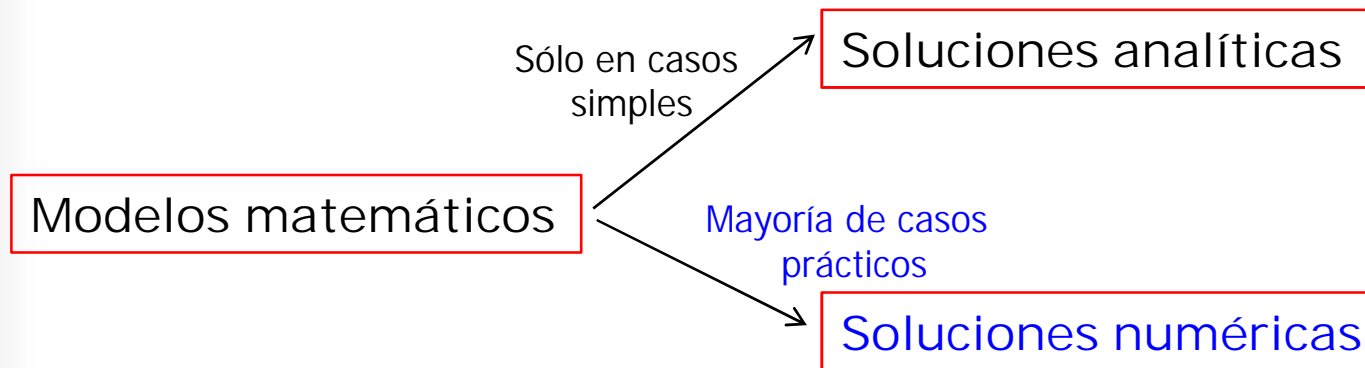


Introducción al Método de los elementos Finitos

Modelos matemáticos en Ciencia e Ingeniería



Ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales



Método de los Elementos Finitos (MEF) : técnica general para hallar soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales e integrales.

Origen: ingeniería estructural, años 50/60, para solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en elasticidad.

A día de hoy su empleo se ha generalizado abarcando gran cantidad de disciplinas, entre ellas el estudio y diseño de dispositivos electromagnéticos

Introducción al Método de los elementos Finitos

- Electric field intensity \mathbf{E}
- Electric displacement or electric flux density \mathbf{D}
- Magnetic field intensity \mathbf{H}
- Magnetic flux density \mathbf{B}
- Current density \mathbf{J}
- Electric charge density ρ

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

Condiciones de contorno

ρ_s and \mathbf{J}_s denote surface charge density and *surface current density*

Introducción al Método de los elementos Finitos

Asumiendo campos armónicos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{j\check{S}t}$$

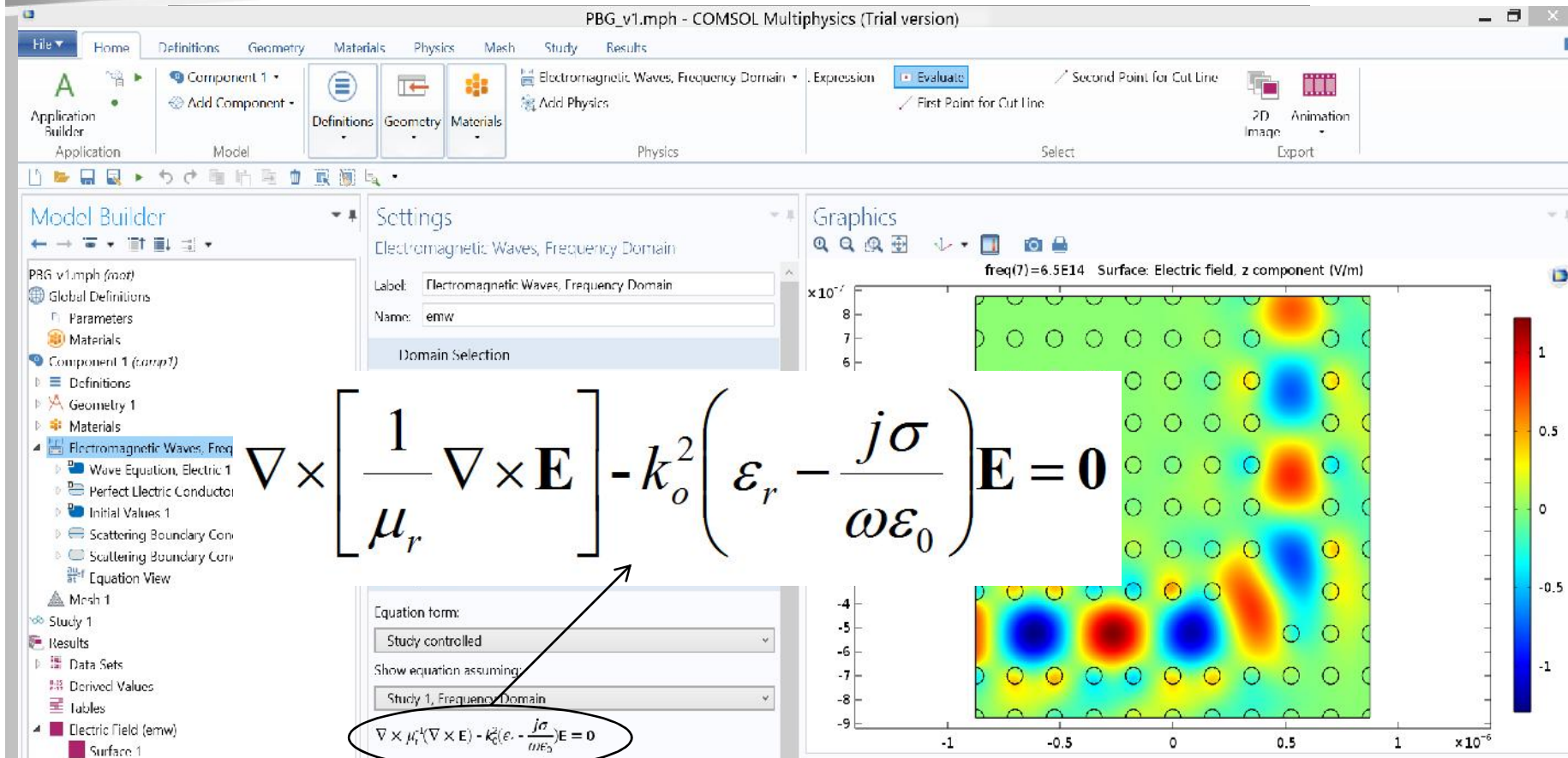
$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{j\check{S}t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\check{S}\tilde{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon}_r \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] = -j\check{S}\tilde{\epsilon}_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] = -j\check{S}\tilde{\epsilon}_0 (\nabla \times \mathbf{H}) = -j\check{S}\tilde{\epsilon}_0 \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] = -j\check{S}\tilde{\epsilon}_0 \dagger \mathbf{E} + \check{S}^2 \tilde{\epsilon}_0 \nu_0 \nu_r \mathbf{E} = k_o^2 \left(\nu_r - \frac{j\dagger}{\check{S}\nu_0} \right) \mathbf{E}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

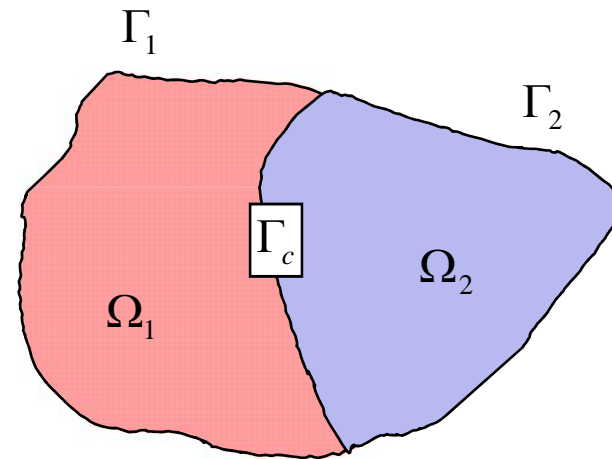


Introducción al Método de los elementos Finitos

En general, cualquier problema consistirá en resolver:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] - k_o^2 \left(\nu_r - \frac{j\ddagger}{\tilde{S}\nu_0} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

En una determinada región del espacio y bajo ciertas condiciones de contorno



$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

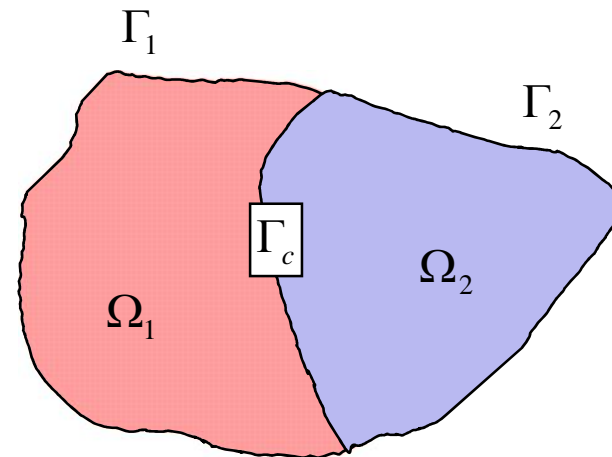
Introducción al Método de los elementos Finitos

En vez de resolver este problema, se aborda lo que se conoce como la forma "débil" (Weak form) :

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left(\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] - k_o^2 \left(v_r - \frac{j\ddagger}{\check{S}v_0} \right) \mathbf{E} \right) d\Omega = \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{E}_{test}$$

Veamos que ventajas aporta este planteamiento



$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left(\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right] - k_o^2 \left(v_r - \frac{j\ddagger}{\check{S}v_0} \right) \mathbf{E} \right) d\Omega = 0$$

Utilizando:

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

El primer término puede escribirse de la forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left(\nabla \times \left[\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right] \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right] \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{test}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\mathbf{E}_{test} \times \left(\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\mathbf{E}_{test} \times \left(\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] d\Omega \xrightarrow{\text{T}^a \text{ Gauss}} \int_{\partial\Omega} \left[\mathbf{E}_{test} \times \left(\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left(\frac{1}{\tilde{r}} \nabla \times \mathbf{E} \right) \times \mathbf{n} \right] dS$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Reescribimos todo:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{test}) - \int_{\Omega} k_o^2 \left(\nu_r - \frac{j\ddagger}{\check{S}\nu_0} \right) (\mathbf{E}_{test} \cdot \mathbf{E}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] dS = 0$$

El término con la integral de contorno puede desarrollarse como:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] dS + \int_{\Gamma_c} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] dS$$

Donde además: $\left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] = j\check{S}\tilde{\nu}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{H})$

Por tanto:

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{E}_{test} \cdot \left[\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \times \mathbf{n} \right] dS \quad \Gamma \quad \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = 0$$

En un medio libre de corrientes

Introducción al Método de los elementos Finitos

Si además asumimos que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_{i=1,2}} = 0$$

Condición "Natural"

Todas las integrales de contorno se cancelarán quedando por tanto:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{test}) - \int_{\Omega} k_o^2 \left(\nu_r - \frac{j\ddagger}{\tilde{S}\nu_0} \right) (\mathbf{E}_{test} \cdot \mathbf{E}) d\Omega = 0$$

$\forall \mathbf{E}_{test}$

"Weak Form"

Hemos pasado de una ecuación que debía cumplirse para cualquier punto del Dominio a una que debe cumplirse "en promedio" (y con ciertas funciones peso)



Exigencia más débil. Facilita poder tratar posibles singularidades (fuentes puntuales, ...)

Se ha reducido el orden de las derivadas y por tanto también las exigencias de derivabilidad de las soluciones aproximadas (buscadas)

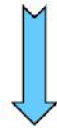
Y además se impone, de forma implícita, la condición de contorno llamada condición natural

Introducción al Método de los elementos Finitos

¿Y cómo aparecen los "elemento finitos"?

$$\int_{\Omega} \phi_{test} \cdot \left(\frac{d}{dx} \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right] - \beta \phi \right) d\Omega = 0$$

Número finito de funciones test



$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega} \phi_{test}^e \cdot \left(\frac{d}{dx} \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right] - \beta \phi \right) = 0$$

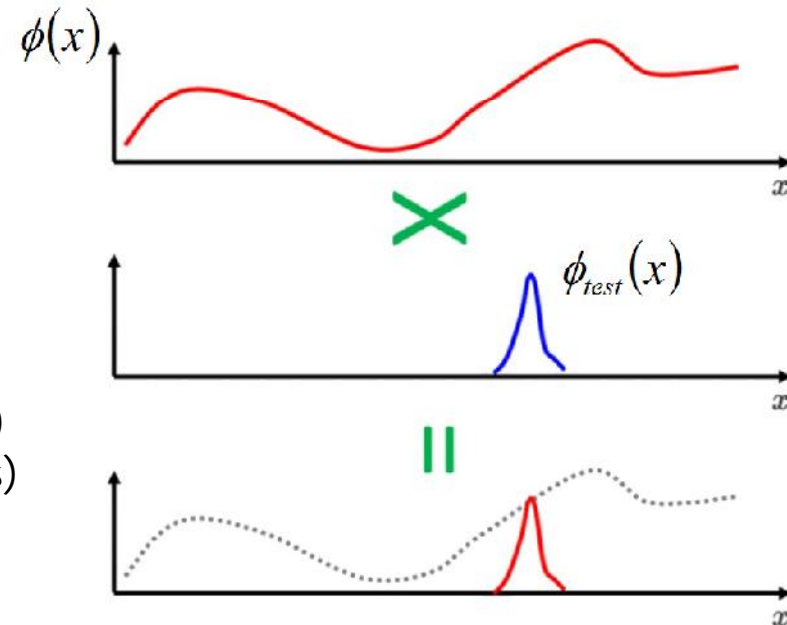
Esto implicará que subdividiremos (mallaremos) todo el dominio en trozos pequeños (elementos)

Por comparar

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_{test} \cdot \left(\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right] - k_o^2 \left(\epsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mathbf{E} \right) d\Omega = 0$$

Al elegir las funciones test (peso)

$$\int_{\Omega} \phi_{test} \cdot \left(\frac{d}{dx} \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right] - \beta \phi \right) d\Omega = 0$$



Introducción al Método de los elementos Finitos

Resolvamos un problema genérico empleando el MEF

$$-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta\phi = f \quad 0 < x < L,$$

$$\phi|_{x=0} = p$$

Condiciones de contorno

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi \right]_{x=L} = q$$

$$\phi|_{x=x_d+0} = \phi|_{x=x_d-0}$$

Posibles fronteras interiores
(continuidad de la función y su derivada)

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=x_d+0} = \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=x_d-0}$$

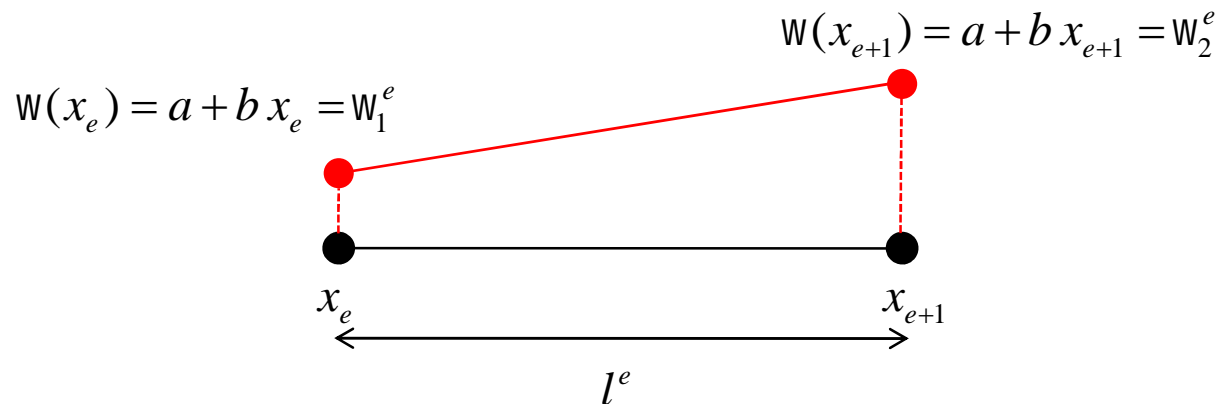
Introducción al Método de los elementos Finitos

Primer paso, obtener la "weak form":

$$\int_0^L \left(r \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dW_{test}}{dx} \right) dx - \left[W_{test} \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_0^L + \int_0^L S W_{test} \cdot W dx = \int_0^L W_{test} \cdot f dx \quad \forall W_{test}$$

Elección de las funciones test: Se utiliza el método de Galerkin, lo que supone que la función buscada (w) se desarrollará en las propias funciones test. Además se supone que la función problema variará de la forma más simple posible en cada elemento (función lineal).

Una función lineal genérica depende de dos variables (a, b) $W(x) = a + b x$



Introducción al Método de los elementos Finitos

Cambiaremos de variables (a, b) \longrightarrow valores en los extremos (nodos) w_1^e, w_2^e \longrightarrow Se necesitarán dos funciones $N_1^e(x), N_2^e(x)$

$$w^e(x) = N_1^e(x)w_1^e + N_2^e(x)w_2^e = \sum_{j=1}^2 N_j^e(x)w_j^e$$

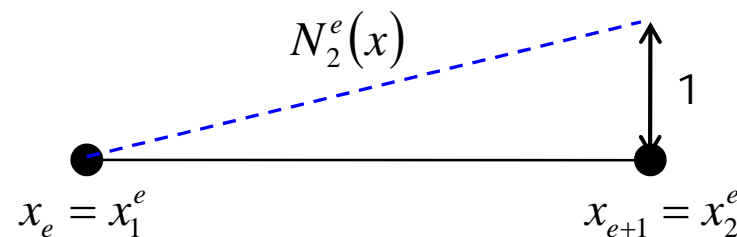
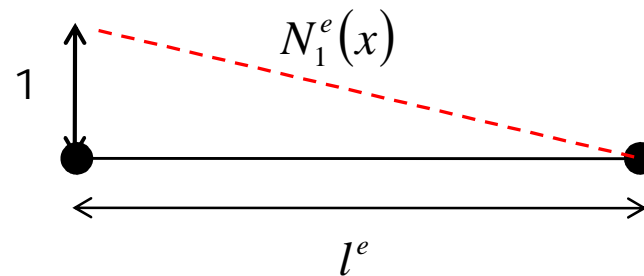
¿Y cómo son estas funciones N ?

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{l^e}$$

$$N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{l^e}$$

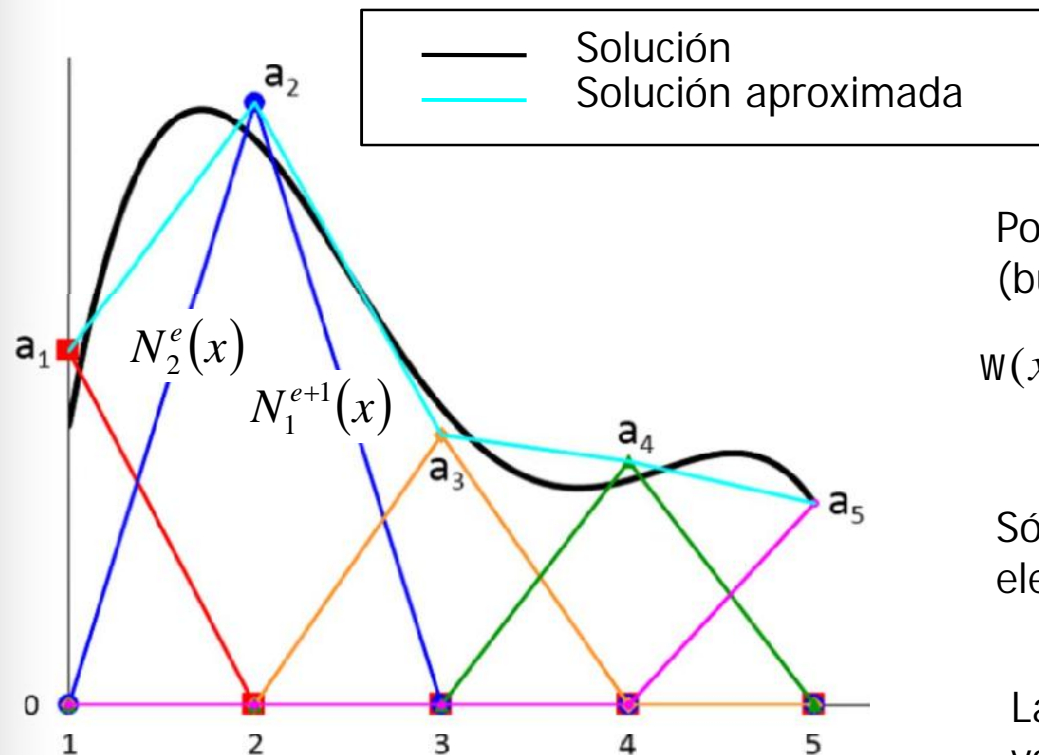
Las funciones base siempre cumplen

$$N_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}$$



Introducción al Método de los elementos Finitos

La idea es que estas funciones N sean las funciones test. Es decir $W_{test} = \{N_1^e, N_2^e\}_{e=1}^{N^{\circ} \text{ elementos}}$



Por construcción la función aproximada (buscada) será continua:

$$W(x)|_{nodo^-} = W(x)|_{nodo^+} \implies W_2^e = W_1^{e+1}$$

Sólo se acoplarán las integrales de los elementos vecinos

Las incógnitas de nuestro problema van a ser el valor de la solución aproximada en los nodos

$$W_1^e, W_2^e \text{ con } e = 1, \dots, \text{Número de elementos}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Volvamos a la "weak form" y veamos que expresión tendría la aplicación de estas funciones y desarrollos para un elemento e

$$\text{Ec. Dif : } PW = fW \qquad \tilde{R}(\text{residuo}) = PW - fW = 0$$

"Weak form" para R

$$\int_0^L w_{test} \cdot \tilde{R} \, dx = 0 \qquad R = \int_0^L \left(r \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dw_{test}}{dx} \right) dx - \left[w_{test} \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_0^L + \int_0^L s w_{test} \cdot W \, dx - \int_0^L w_{test} \cdot f \, dx = 0$$

$\forall w_{test}$

Para el elemento e, de todas las funciones test, únicamente son diferentes de cero N_1^e, N_2^e

$$R_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(r \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dN_i^e}{dx} \right) dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} s N_i^e \cdot W \, dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \cdot f \, dx - \left[N_i^e \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0$$

Si además tenemos en cuenta que w en ese elemento es de la forma (Galerkin):

$$w(x) = w^e(x) = \sum_{j=1}^2 N_j^e(x) w_j^e$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

$$R_i^e = \sum_{j=1}^2 w_j^e \left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(r \frac{dN_j^e}{dx} \cdot \frac{dN_i^e}{dx} \right) dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} s N_i^e \cdot N_j^e dx \right] - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \cdot f dx - \left[N_i^e \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

$$R_i^e = \sum_{j=1}^2 w_j^e \left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(r \frac{dN_j^e}{dx} \cdot \frac{dN_i^e}{dx} \right) dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} s N_i^e \cdot N_j^e dx \right] - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \cdot f dx - \left[N_i^e \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0$$

K_{ij}^e b_i^e g_i^e

Introducción al Método de los elementos Finitos

$$R_i^e = \sum_{j=1}^2 w_j^e \left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(r \frac{dN_j^e}{dx} \cdot \frac{dN_i^e}{dx} \right) dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} s N_i^e \cdot N_j^e dx \right] - \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i^e \cdot f dx - \left[N_i^e \cdot r \frac{dW}{dx} \right]_{x_1^e}^{x_2^e} = 0$$

K_{ij}^e

b_i^e

g_i^e

$$\begin{bmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^e \\ w_2^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1^e \\ g_2^e \end{bmatrix} = 0$$

Recordemos que las funciones N son muy simples $N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{l^e}$, $N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{l^e}$

Las expresiones de estas integrales también lo serán

Introducción al Método de los elementos Finitos

Consideraremos que r y s son constantes (o bien las aproximamos por constantes) en todo el elemento e . La matriz K quedará:

$$K_{11}^e = K_{22}^e = r^e \frac{1}{l^e} + s^e \frac{l^e}{3}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = r^e \left(-\frac{1}{l^e} \right) + s^e \frac{l^e}{6}$$

Consideramos que f es también una constante (en caso de que no sea constante se puede hacer la integral por cualquier método numérico):

$$b_1^e = b_2^e = f \frac{l^e}{2}$$

Por último el vector g lo escribiremos como:

$$g_1^e = \left[-r \frac{dW}{dx} \right]_{x_1^e}, \text{ donde se ha tenido en cuenta que } N_1^e(x_2^e) = 0 \text{ y } N_1^e(x_1^e) = 1$$

$$g_2^e = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x_2^e}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

En cada elemento cada uno de los residuos debe ser 0, ya que no es más que la integral ponderada de algo que buscamos que sea 0

$$\int peso_i \cdot (Pw - fw) = 0$$

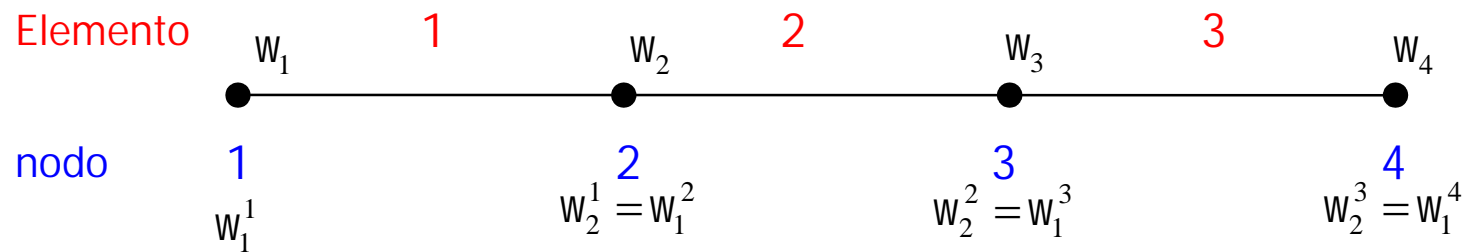
Lo mismo debe cumplirse para la suma de todos los residuos (Sumaremos los residuos de todos los elementos (M elementos)):

$$\sum_{e=1}^M \begin{bmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^M \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1^e \\ w_2^e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1^e \\ g_2^e \end{pmatrix} = 0$$

Y trataremos de reescribirlo en forma matricial

Introducción al Método de los elementos Finitos

Veamos por ejemplo como sería con 3 elementos (4 nodos):



Construimos un vector columna con las incógnitas

$$\begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 = w_1^2 \\ w_2^2 = w_1^3 \\ w_2^3 = w_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

El número de incógnitas será

M (número de elementos) + 1

Introducción al Método de los elementos Finitos

Y teniendo en cuenta que para un elemento e se cumplía:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1^e \\ w_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^e \\ b_2^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1^e \\ g_2^e \end{pmatrix}$$

Se llega a:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^3 + b_1^3 \\ b_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 + g_1^2 \\ g_2^3 + g_1^3 \\ g_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz tridiagonal}$$

Que reescribimos como:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Obtengamos los elementos genéricos de esta matriz [K] :

Supongamos

M elementos

N = (M+1) incógnitas \Rightarrow K (N,N)

El primer y último elementos serán:

$$K_{11} = K_{11}^1 = r^1 \frac{1}{l^1} + s^1 \frac{l^1}{3}$$

$$K_{NN} = K_{22}^M = r^M \frac{1}{l^M} + s^M \frac{l^M}{3}$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Obtengamos los elementos genéricos de esta matriz [K] :

Supongamos

M elementos

N = (M+1) incógnitas \Rightarrow K (N,N)

El primer y último elementos serán:

$$K_{11} = K_{11}^1 = r^1 \frac{1}{l^1} + s^1 \frac{l^1}{3}$$

$$K_{NN} = K_{22}^M = r^M \frac{1}{l^M} + s^M \frac{l^M}{3}$$

Mientras que el resto de términos de la diagonal:

$$K_{ii} = K_{22}^{i-1} + K_{11}^i = \left(r^{i-1} \frac{1}{l^{i-1}} + s^{i-1} \frac{l^{i-1}}{3} \right) + \left(r^i \frac{1}{l^i} + s^i \frac{l^i}{3} \right)$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Por último, el resto de términos no nulos:

$$K_{i+i,i} = K_{i,i+1} = K_{12}^i = -r^i \frac{1}{l^i} + s^i \frac{l^i}{6}$$

$$i = 1, \dots, N-1$$

El primer y último elementos serán:

$$K_{11} = K_{11}^1 = r^1 \frac{1}{l^1} + s^1 \frac{l^1}{3}$$

$$K_{NN} = K_{22}^M = r^M \frac{1}{l^M} + s^M \frac{l^M}{3}$$

Mientras que el resto de términos de la diagonal:

$$K_{ii} = K_{22}^{i-1} + K_{11}^i = \left(r^{i-1} \frac{1}{l^{i-1}} + s^{i-1} \frac{l^{i-1}}{3} \right) + \left(r^i \frac{1}{l^i} + s^i \frac{l^i}{3} \right)$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

De la misma forma los elementos del vector b serán:

$$b_1 = b_1^1 = f^1 \cdot \frac{l^i}{2}$$

$$b_N = b_2^M = f^M \cdot \frac{l^M}{2}$$

$$b_i = b_2^{i-1} + b_1^i = f^{i-1} \cdot \frac{l^i}{2} + f^i \cdot \frac{l^i}{2}$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

$$\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 + b_1^2 \\ b_2^3 + b_1^3 \\ b_2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector g :

$$g_1 = g_1^1 = \left[-r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_1=0}$$

$$g_N = g_2^M = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_N=L}$$

$$g_i = g_2^{i-1} + g_1^i = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_2^{i-1}} - \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_1^i}$$

Que no es más que:

$$\left[r \frac{dW}{dx} \right]_+ - \left[r \frac{dW}{dx} \right]_- = 0$$

En cada nodo

Hemos supuesto que era continua

Condición "Natural"

Introducción al Método de los elementos Finitos

Mientras que el vector g :

$$g_1 = g_1^1 = \left[-r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_1=0}$$

$$g_N = g_2^M = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_N=L}$$

$$g_i = g_2^{i-1} + g_1^i = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_2^{i-1}} - \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=x_1^i}$$

Que no es más que:

$$\left[r \frac{dW}{dx} \right]_+ - \left[r \frac{dW}{dx} \right]_- = 0$$

En cada nodo

Hemos supuesto que era continua

Condición "Natural"

Si en nuestra programación no incorporáramos el vector g , estaríamos, implícitamente, imponiendo una condición de contorno de Neumann

Veamos cómo aplicar las condiciones de contorno

Introducción al Método de los elementos Finitos

Resolvamos un problema genérico empleando el MEF

$$-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta\phi = f \quad 0 < x < L,$$

En nuestro problema habíamos supuesto unas condiciones de contorno muy generales

$$\phi|_{x=0} = p \quad \text{Condición de contorno tipo Dirichlet o 1}^{\text{er}} \text{ tipo}$$

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi \right]_{x=L} = q \quad \text{Condición de contorno de 3}^{\text{er}} \text{ tipo o de Robin}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Veamos como tratar con ellas. Empecemos por la de Robin

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma \phi \right]_{x=L} = q \quad q \text{ y } x \text{ serán parámetros conocidos en el contorno}$$

Teniendo en cuenta que:

$$g_N = \left[r \frac{dW}{dx} \right]_{x=L} = q - x W_N$$

Y recordando que: $[K]\{w\} = \{b\} + \{g\}$

Esta condición puede implementarse facilmente redefiniendose los últimos elementos de la matriz K y del vector b

$$K'_{NN} = K_{NN} + x$$

$$b'_N = b_N + q$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Impongamos ahora la condición de Dirichlet

$$w|_{x=0} = p \quad p \text{ será un parámetros conocidos en el contorno}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & \dots \\ K_{21} & \dots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Simplemente realizamos los siguientes cambios:

$$K_{11} = 1$$

$$K_{12} = K_{13} \dots K_{1N} = 0$$

$$b_1 = p$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

Finalmente al incorporar ambas condiciones nos quedará:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \cdots \\ K_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ & & \textcircled{K'_{NN}} & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \textcircled{p} \\ b_2 \\ \vdots \\ \textcircled{b'_N} \end{Bmatrix}$$

$\textcircled{K'_{NN}} \quad \textcircled{b'_N}$
||| |||
 $K_{NN} + \chi \quad b_N + q$

Vemos que el vector g ha desaparecido de la formulación

Introducción al Método de los elementos Finitos

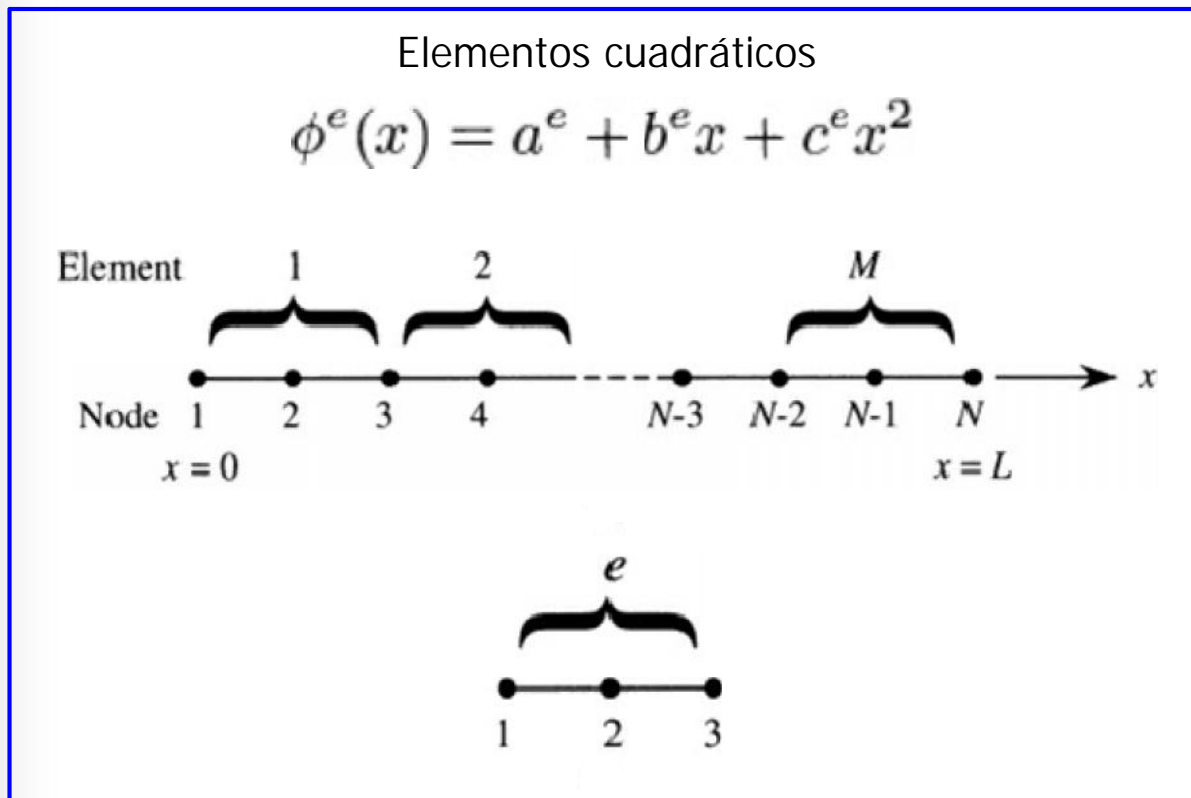
Comentemos, muy brevemente, los aspectos más relevantes en las formulaciones más complejas del MEF

- Empleo de elementos de orden superior (cuadráticos, cúbicos, ...)
- Formulaciones 2 y 3D.
- Elementos vectoriales

Introducción al Método de los elementos Finitos

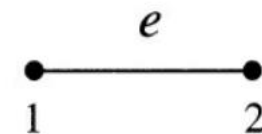
Empleo de elementos de orden superior

En los llamados elementos cuadráticos (elementos de 2º orden), cada elemento tiene 3 nodos, uno en cada uno de los extremos y un tercero situado, normalmente, en el centro del elemento. En cada elemento, la función problema se aproxima por una función cuadrática



Elementos lineales

$$W(x) = a + b x$$

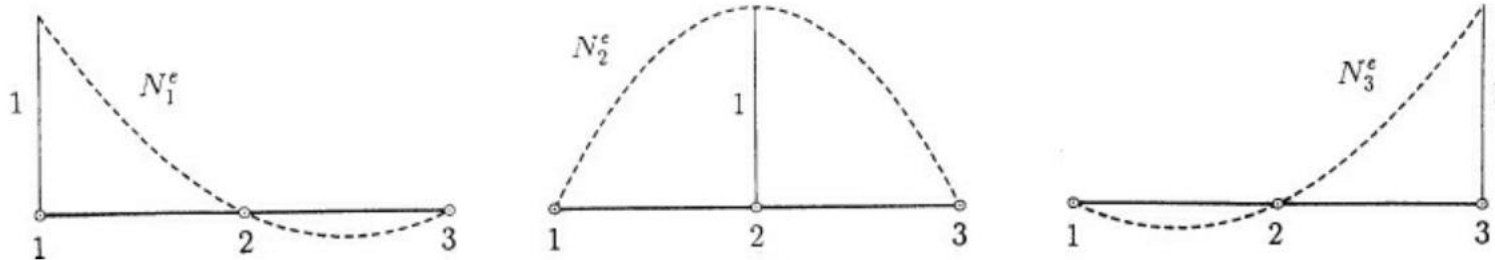


Introducción al Método de los elementos Finitos

Ahora se tendrán 3 funciones test por elemento:

$$w^e(x) = N_1^e(x)w_1^e + N_2^e(x)w_2^e + N_3^e(x)w_3^e = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x)w_j^e$$

Nuevamente, las incógnitas serán los valores de la función buscada en los nodos



Las funciones base siempre cumplen

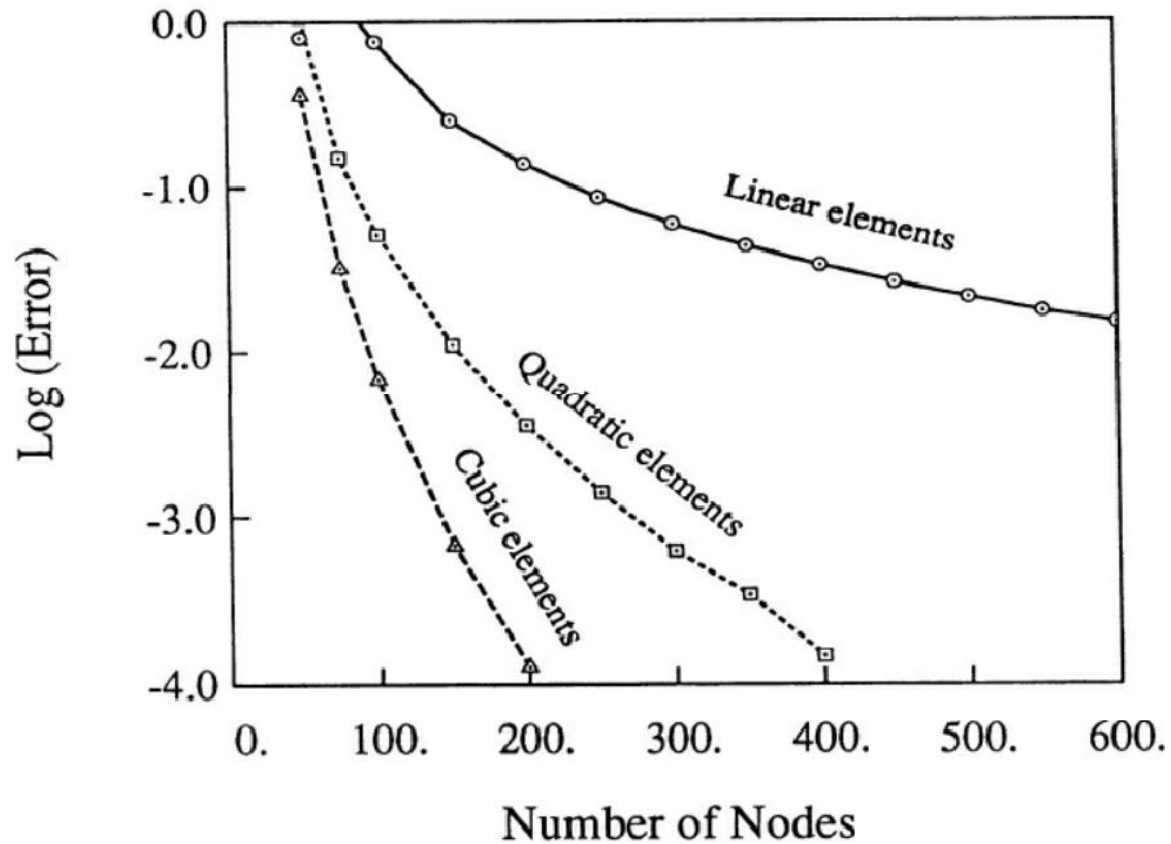
$$N_i^e(x_j^e) = u_{ij}$$

$$N_1^e = \frac{(x - x_2^e)(x - x_3^e)}{(x_1^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)}$$

$$N_2^e = \frac{(x - x_1^e)(x - x_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(x_2^e - x_3^e)}$$

$$N_3^e = \frac{(x - x_1^e)(x - x_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)}$$

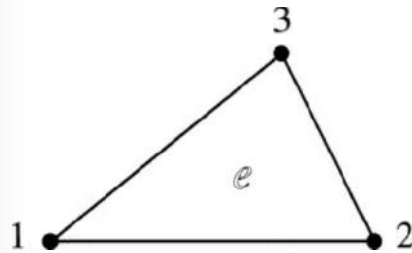
Introducción al Método de los elementos Finitos



Average error of the finite element solution versus the number of nodes using linear, quadratic, and cubic elements.

Introducción al Método de los elementos Finitos

Elementos finitos en problemas 2D



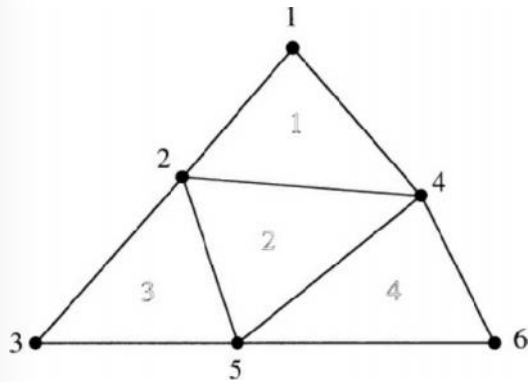
Elemento triangular lineal

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y$$

3 funciones test por elemento

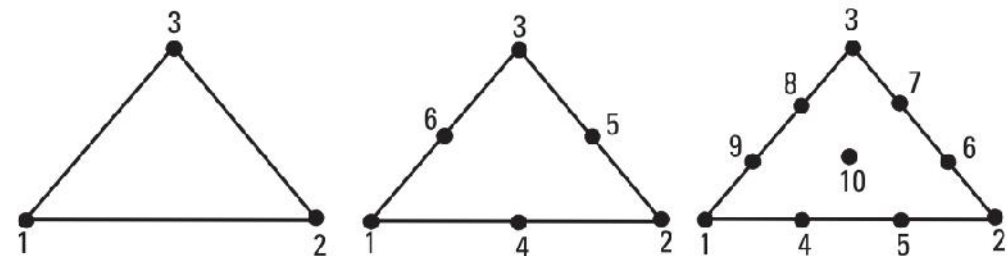
$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \phi_j^e$$

Las incógnitas serán los valores de la función buscada en los nodos (vértices del triángulo)



Ejemplo de muestreo

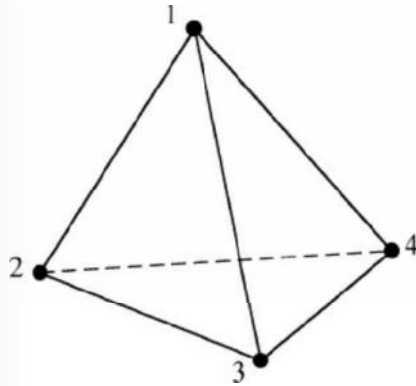
Ordenes superiores



First-, second-, and third-order triangular elements

Introducción al Método de los elementos Finitos

Elementos finitos en problemas 3D



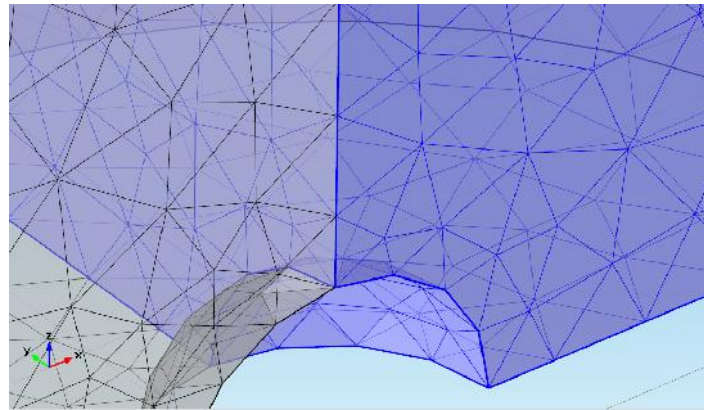
Elemento tetraédrico lineal

$$\phi^e(x, y, z) = a^e + b^e x + c^e y + d^e z$$

4 funciones test por elemento

$$\phi^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 N_j^e(x, y, z) \phi_j^e$$

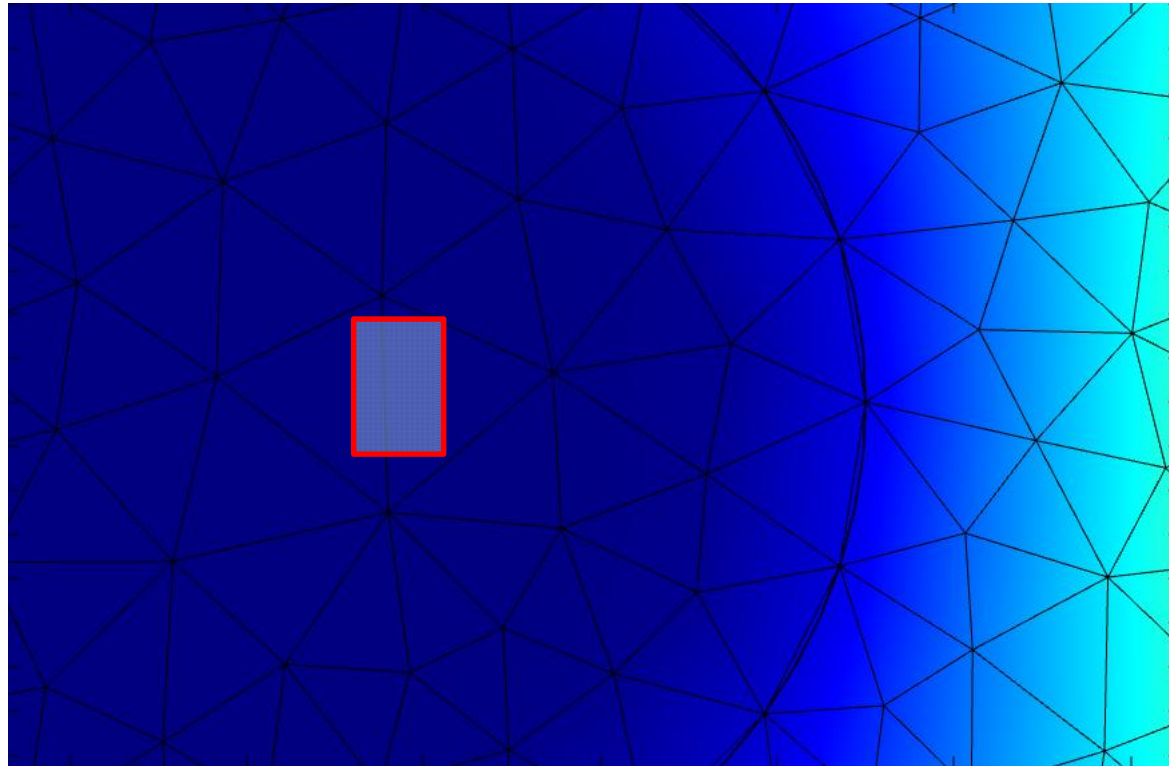
Las incógnitas serán los valores de la función buscada en los nodos (vértices del tetraedro)



Ejemplo de muestreo

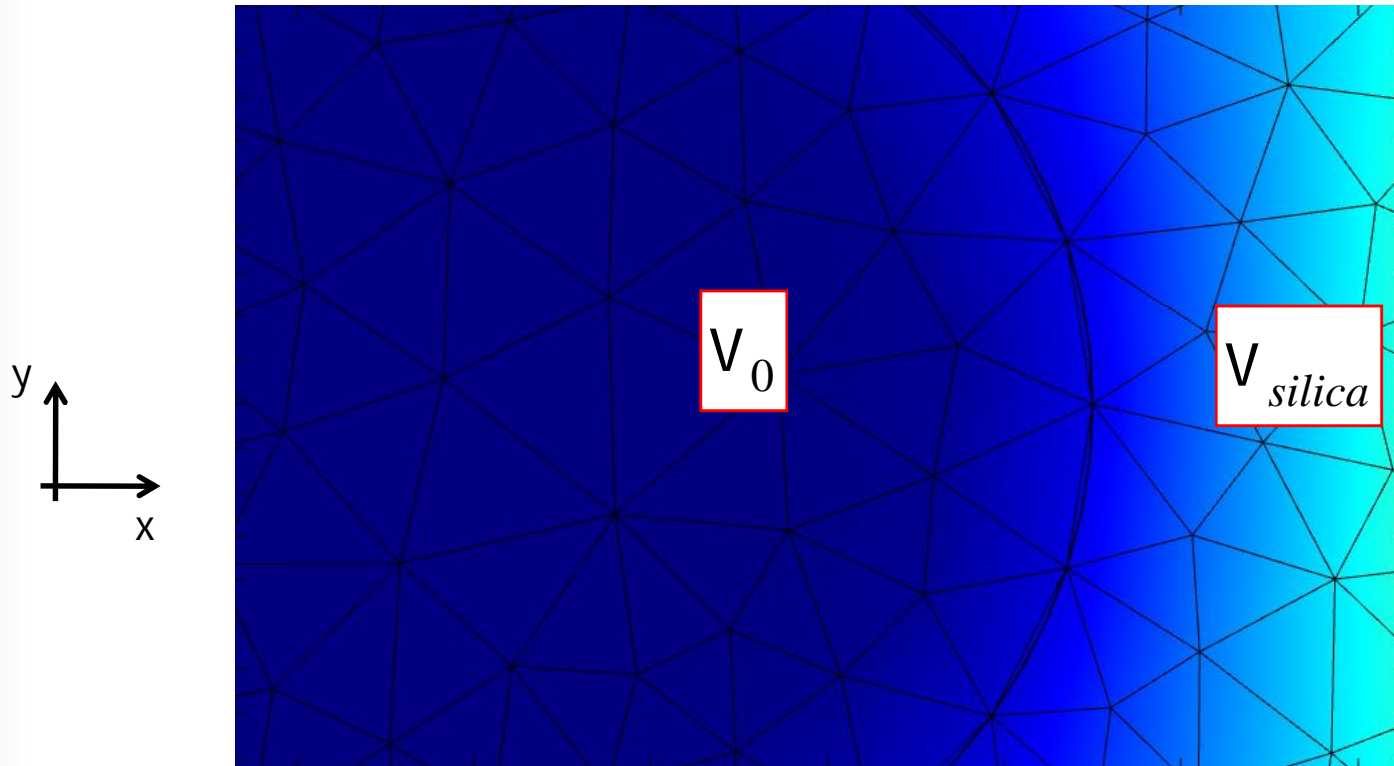
Introducción al Método de los elementos Finitos

Elementos vectoriales



Introducción al Método de los elementos Finitos

Elementos vectoriales



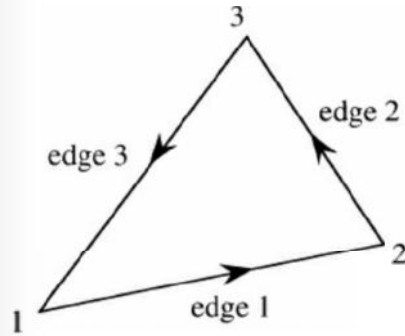
E_t debe ser continua, pero ni E_x , ni E_y serán continuas salvo en ciertos puntos

Introducción al Método de los elementos Finitos

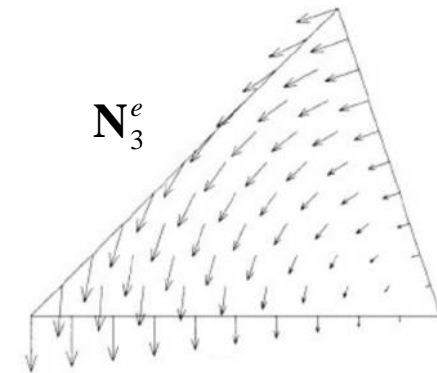
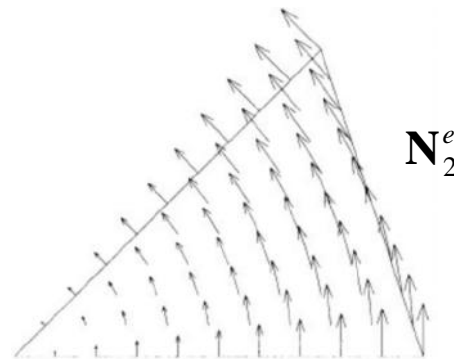
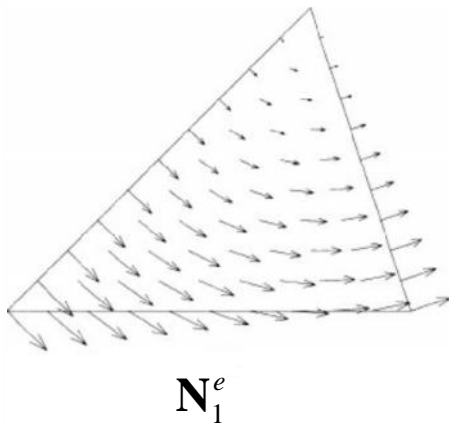
Elementos vectoriales

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^e E_i^e$$

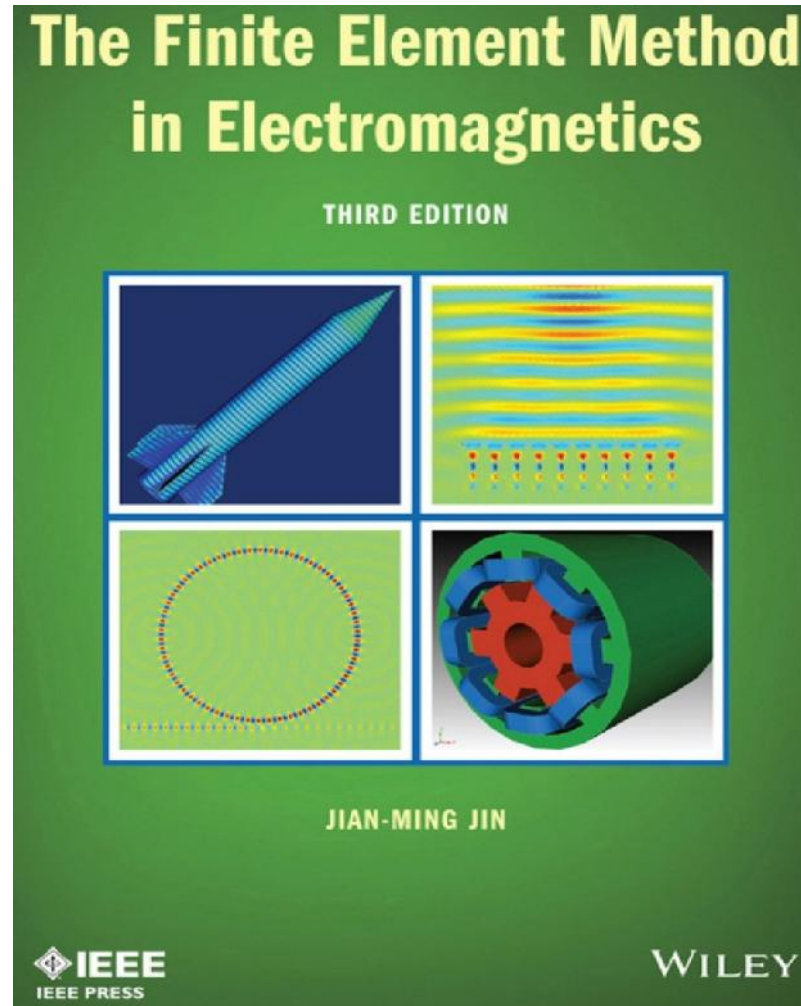
E_i^e es el valor del campo tangencial en el lado i del triángulo. Ahora serán las incógnitas del problema



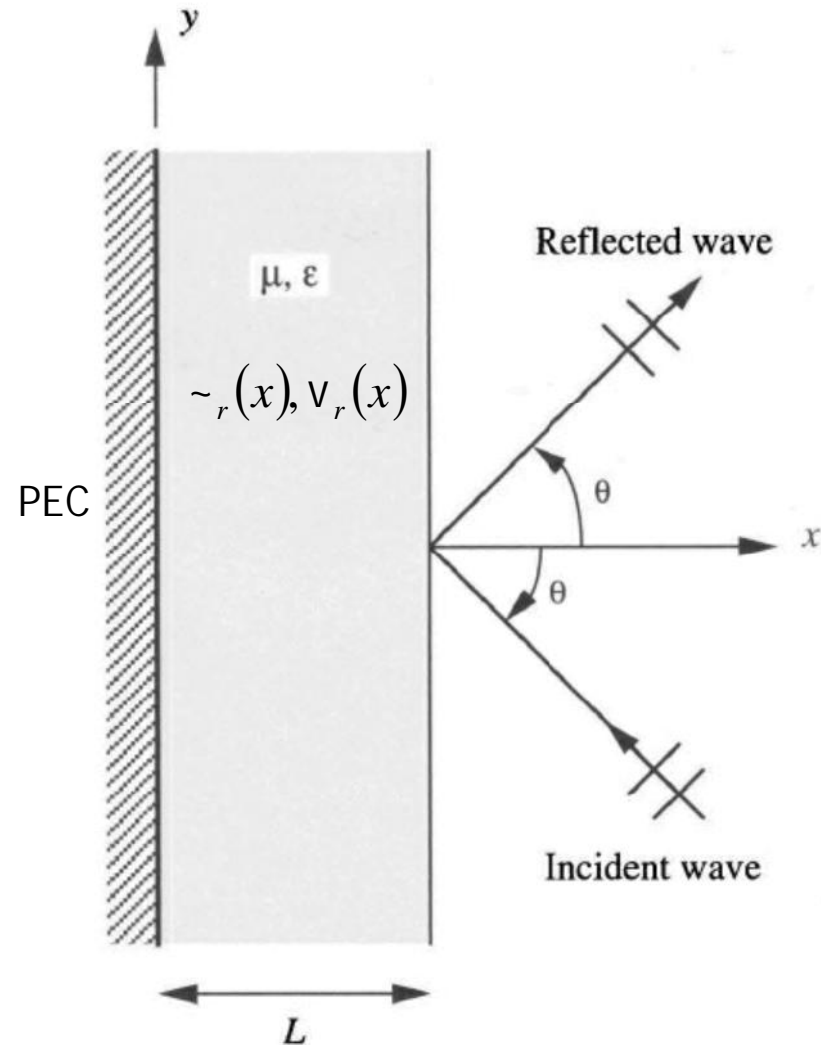
Las funciones base serán ahora vectoriales, de tal manera que la componente tangencial de \mathbf{N}_i^e tendrá un valor fijo para el lado i y será cero para los otros dos lados



Introducción al Método de los elementos Finitos

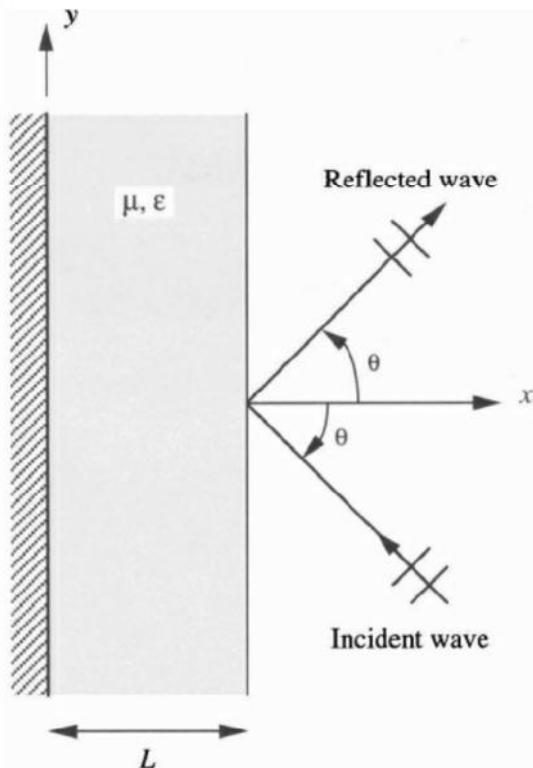


Problema 1D: Aplicación del MEF



Problema 1D: Aplicación del MEF

Podemos descomponer cualquier onda plana en una con polarización TE y otra TM



$$\tilde{n}_r(x), \nu_r(x)$$

$$\boxed{\text{TE}} \quad \mathbf{E} = E_z(x, y) e^{j\tilde{S}t} \hat{z}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\tilde{S} \tilde{\nu}_0 \tilde{\nu}_r \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\tilde{S} \nu_0 \nu_r \mathbf{E}$$



$$\partial_x \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \partial_x E_z \right) + \partial_y \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \partial_y E_z \right) + k_0^2 \nu_r E_z = 0$$

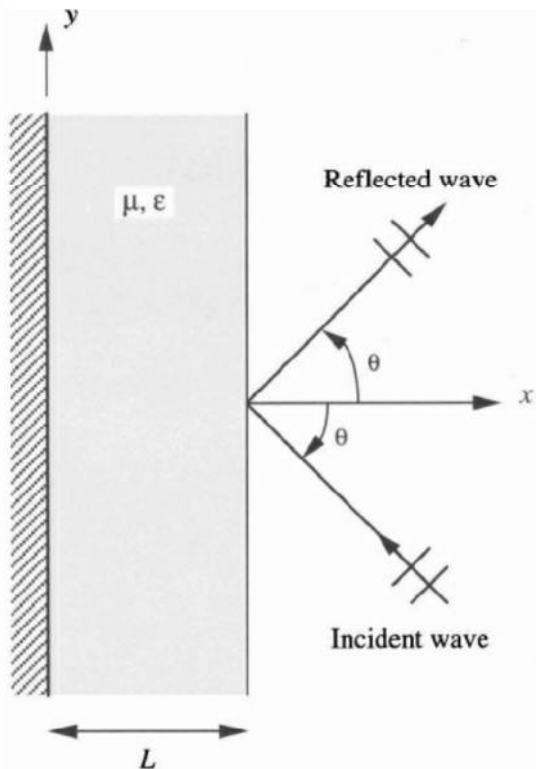
$$E_z^{\text{inc}}(x, y) = E_0 e^{jk_0 x \cos \theta - jk_0 y \sin \theta}$$

$$k_t \text{ se conserva: } k_y \longrightarrow E_z(y) \propto e^{-jk_0 y \sin(\theta)}$$

$$\partial_x \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \partial_x E_z \right) + k_0^2 \left(\nu_r(x) - \frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \sin^2(\theta) \right) E_z = 0$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

Podemos descomponer cualquier onda plana en una con polarización TE y otra TM



$$n_r(x), v_r(x)$$

$$\text{TM} \quad \mathbf{H} = H_z(x, y) e^{j\tilde{S}t} \hat{z}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\tilde{S} \tilde{v}_0 \tilde{v}_r \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\tilde{S} v_0 v_r \mathbf{E}$$



$$\partial_x \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_x H_z \right) + \partial_y \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_y H_z \right) + k_0^2 \tilde{v}_r H_z = 0$$

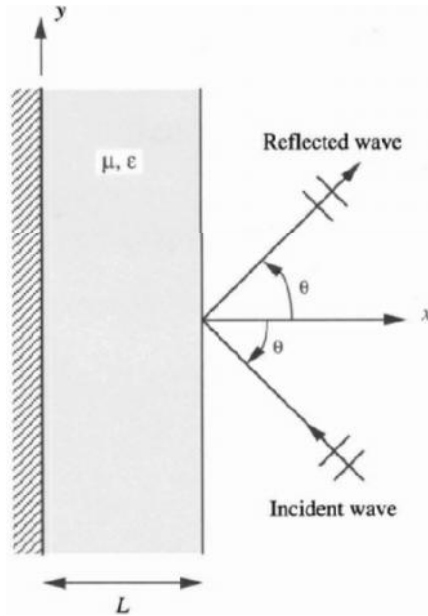
$$k_t \text{ se conserva: } k_y \longrightarrow H_z(y) \propto e^{-jk_0 y \sin(\theta)}$$

$$\partial_x \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_x H_z \right) + k_0^2 \left(\tilde{v}_r(x) - \frac{1}{v_r(x)} \sin^2(\theta) \right) H_z = 0$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

$$\boxed{\text{TE}} \quad \mathbf{E} = E_z(x, y) e^{j\tilde{S}t} \hat{z}$$

Veamos que condiciones de contorno tenemos



Importante, ya no aparece R, (parámetro que no conocemos a priori)

Evidentemente en $x=0$ $E_z = 0$ (PEC)

Por otro lado:

$$E_z(x, y) = \left(E_0 e^{jk_0(x-L)\cos(\theta)} + R \cdot E_0 e^{-jk_0(x-L)\cos(\theta)} \right) e^{-jk_0 y \sin(\theta)}$$

para $x > L$

R (coeficiente de reflexión)

Hacemos la derivada de E_z

$$\frac{dE_z}{dx} = jk_0 \cos(\theta) \left(E_0 e^{jk_0(x-L)\cos(\theta)} - R \cdot E_0 e^{-jk_0(x-L)\cos(\theta)} \right) e^{-jk_0 y \sin(\theta)}$$

Que podremos escribir de la forma:

$$\frac{dE_z}{dx} = \left(2jk_0 \cos(\theta) E_0 e^{jk_0(x-L)\cos(\theta)} - jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right) e^{-jk_0 y \sin(\theta)}$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

$$\frac{dE_z}{dx} = \left(2jk_0 \cos(\theta) E_0 e^{jk_0(x-L)\cos(\theta)} - jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right) e^{-jk_0 y \sin(\theta)} \quad x > L$$

$$\text{En } x=L \quad \left[\frac{dE_z}{dx} + jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right]_{x=L^+} = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

Queremos obtener la condición que se debe cumplir justo en el lado del dieléctrico

$$\text{Tenemos en cuenta} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z \text{ continuo} \\ H_y = \frac{-j}{\tilde{S} \sim_0} \left[\frac{1}{\sim_r} \frac{dE_z}{dx} \right] \text{ debe ser también continuo} \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$[E_z]_{x=L^-} = [E_z]_{x=L^+}$$



$$\left[\frac{1}{\sim_r} \frac{dE_z}{dx} + jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right]_{x=L^-} = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

$$\left[\frac{1}{\sim_r} \frac{dE_z}{dx} \right]_{x=L^-} = \left[\frac{1}{\sim_r} \frac{dE_z}{dx} \right]_{x=L^+ \text{ (aire)}} = \left[\frac{dE_z}{dx} \right]_{x=L^+}$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

Ec. Dif

TE

$$\partial_x \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \partial_x E_z \right) + k_0^2 \left(\nu_r(x) - \frac{1}{\tilde{\nu}_r(x)} \sin^2(\theta) \right) E_z = 0$$

Condiciones de contorno

$$E_z|_{x=0} = 0$$

$$\left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \frac{dE_z}{dx} + jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right]_{x=L^-} = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

Y además

E_z continuo

$$H_y = \frac{-j}{\tilde{\nu}_0} \left[\frac{1}{\tilde{\nu}_r} \frac{dE_z}{dx} \right] \text{ debe ser también continuo}$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

Resolvamos un problema genérico empleando el MEF

$$-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta\phi = f \quad 0 < x < L,$$

$$\phi|_{x=0} = p$$

Condiciones de contorno

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi \right]_{x=L} = q$$

$$\phi|_{x=x_d+0} = \phi|_{x=x_d-0}$$

Posibles fronteras interiores
(continuidad de la función y su derivada)

$$\left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=x_d+0} = \left[\alpha \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=x_d-0}$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

Identificando tenemos:

$$w = E_z$$

$$s = -k_0^2 \left(v_r - \frac{1}{\tilde{r}} \sin^2(\theta) \right)$$

$$r = \frac{1}{\tilde{r}}$$

$$f = 0$$

En cuanto a las condiciones de contorno

$$p = 0$$

$$x = jk_0 \cos(\theta)$$

$$q = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

Una vez resuelto el problema, se puede obtener el coeficiente de reflexión:

$$E_z(L) = (E_0 - R \cdot E_0)$$

por lo tanto

$$R = \frac{E_z(L) - E_0}{E_0}$$

Introducción al Método de los elementos Finitos

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \cdots \\ K_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ & & \textcircled{K'_{NN}} & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \textcircled{p} \\ b_2 \\ \vdots \\ \textcircled{b'_N} \end{Bmatrix}$$

$\textcircled{K'_{NN}} \quad \text{III} \quad K_{NN} + \gamma$
 $\textcircled{b'_N} \quad \text{III} \quad b_N + q$

$$K_{11} = r^1 \frac{1}{l^1} + s^1 \frac{l^1}{3}$$

$$K_{NN} = r^M \frac{1}{l^M} + s^M \frac{l^M}{3}$$

$$K_{i+i,i} = K_{i,i+1} - r^i \frac{1}{l^i} + s^i \frac{l^i}{6}$$

$$i = 1, \dots, N-1$$

$$b_1 = f^1 \cdot \frac{l^1}{2}$$

$$b_N = f^M \cdot \frac{l^M}{2}$$

$$b_i = f^{i-1} \cdot \frac{l^i}{2} + f^i \cdot \frac{l^i}{2}$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

$$K_{ii} = \left(r^{i-1} \frac{1}{l^{i-1}} + s^{i-1} \frac{l^{i-1}}{3} \right) + \left(r^i \frac{1}{l^i} + s^i \frac{l^i}{3} \right)$$

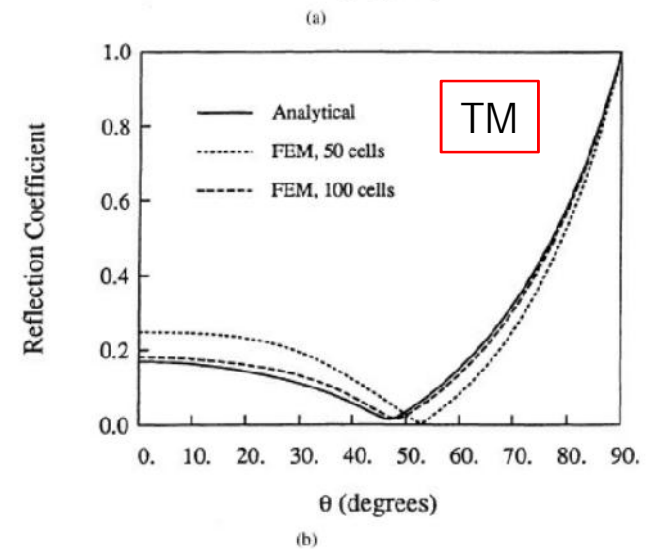
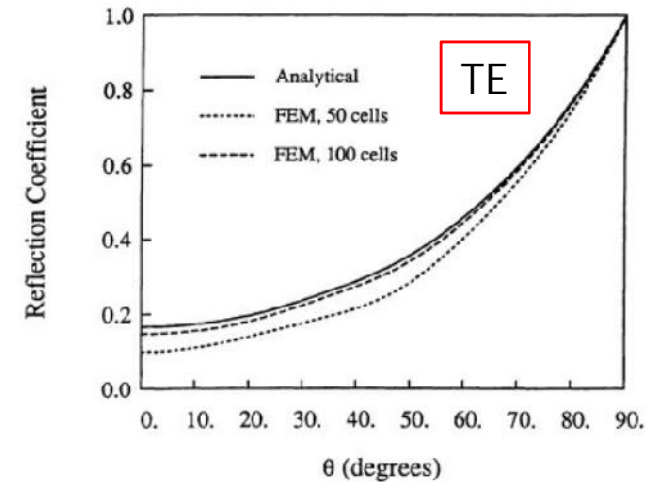
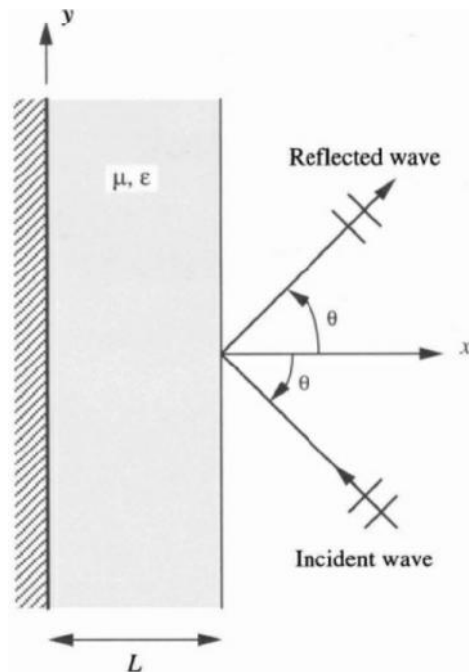
$$i = 2, \dots, N-1$$

Problema 1D: Aplicación del MEF

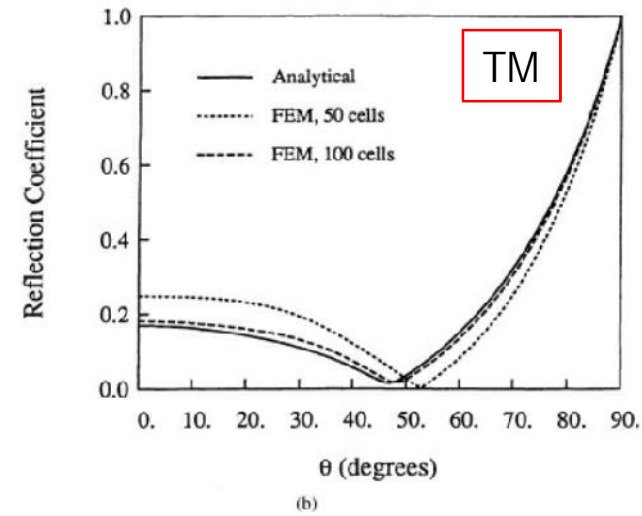
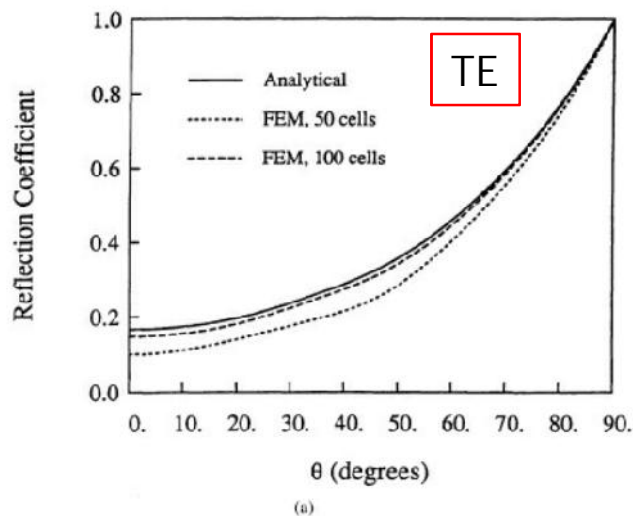
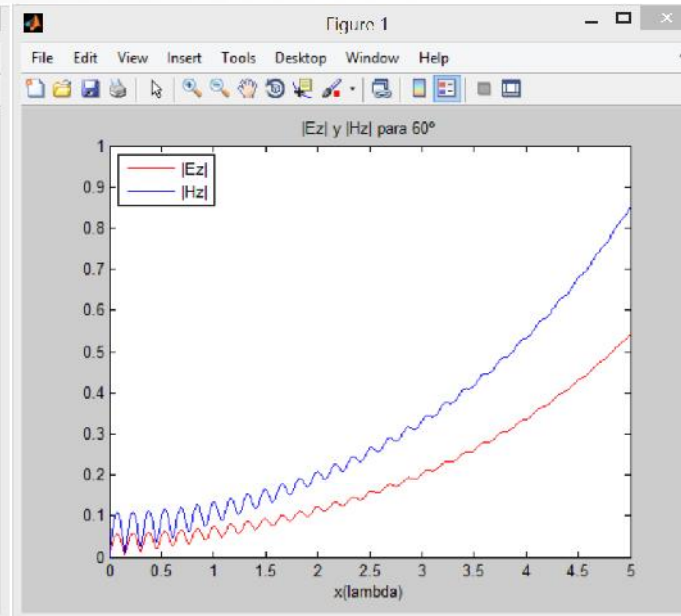
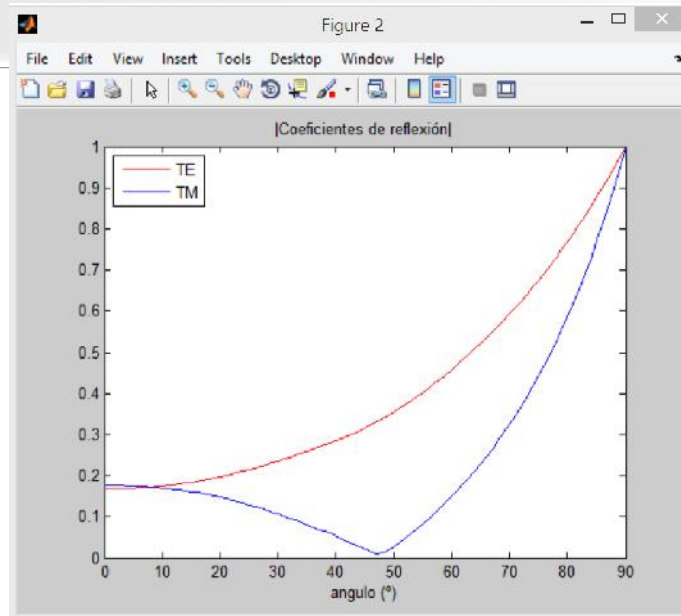
$$\tilde{\gamma}_r = 2 - 0.1 \cdot i$$

$$v_r(x) = 4 + (2 - 0.1 \cdot i) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

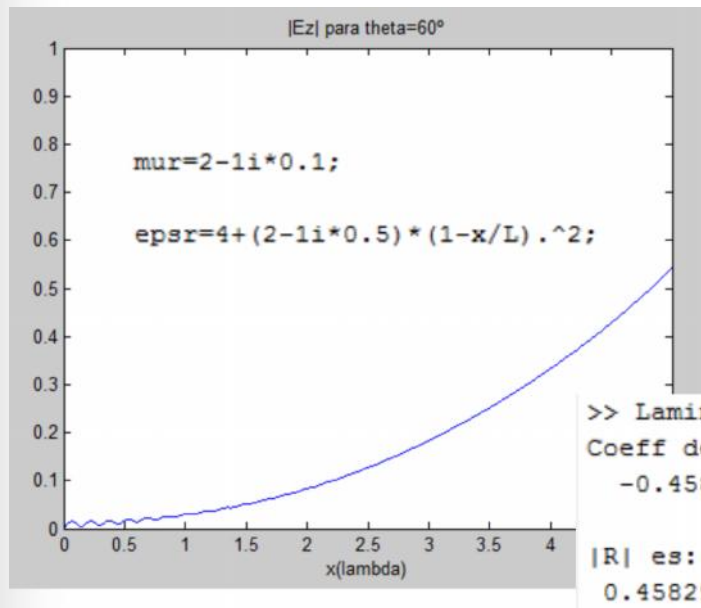
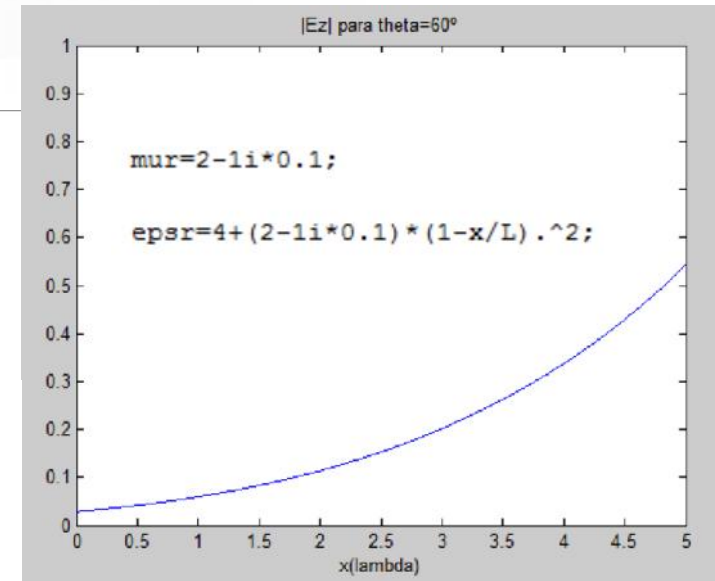
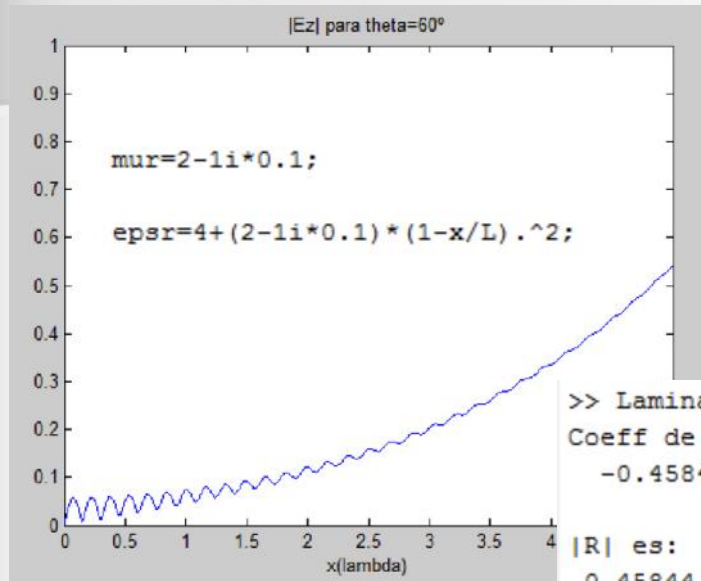
$$L = 5\lambda_0$$



Problema 1D: Aplicación del MEF



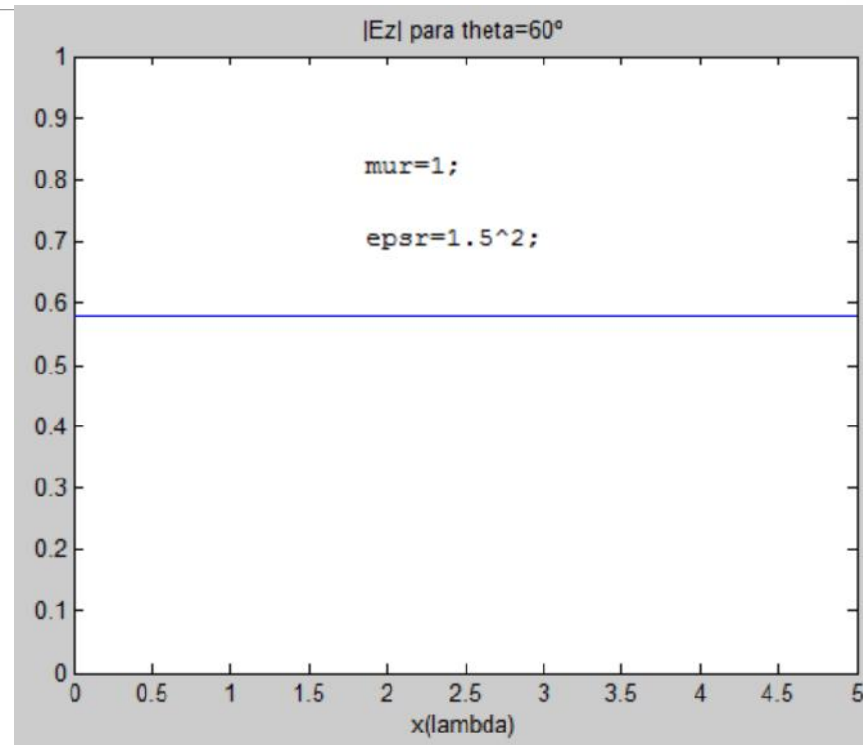
Problema 1D: Aplicación del MEF



>> Lamina_1D_TE_transparente
Coeff de Reflexion (R) es:
-0.4582 - 0.0089i

|R| es:
0.45828

Problema 1D: Aplicación del MEF



```
>> TE_transparente_EcFresnel  
Coeff de Reflexion (R) es:  
-0.4202 + 0.0000i  
  
R ecuaciones de Fresnel es:  
-0.4202
```

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Comenzaremos empleando el módulo más general, en el que plantearemos nosotros mismos las ecuaciones a resolver.

The image shows the COMSOL software interface during the setup of a physics interface. It is divided into two main panels: 'Select Physics' on the left and 'Review Physics Interface' on the right.

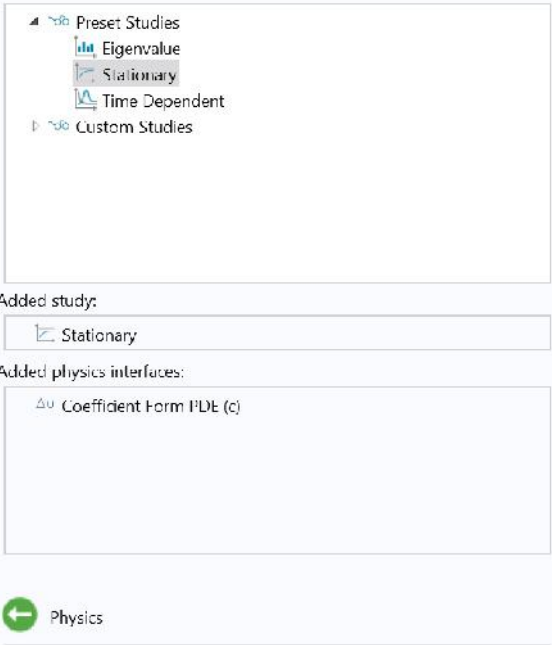
Select Physics: This panel contains a tree view of physics modules. The 'Mathematics' module is expanded, and 'PDE Interfaces' is selected. Under 'PDE Interfaces', 'Coefficient Form PDE (c)' is highlighted. Below the tree, the 'Added physics interfaces:' list shows 'Coefficient Form PDE (c)'. At the bottom, there are buttons for 'Space Dimension' (set to 1D), 'Study', 'Help', 'Cancel', and 'Done'.

Review Physics Interface: This panel is titled 'Coefficient Form PDE (c)'. It has several configuration sections:

- Dependent Variables:** A section with a blue header. It includes a 'Field name:' input field with 'u', a 'Number of dependent variables:' input field with '1', and a 'Dependent variables:' list box containing 'u'. There are '+' and '-' icons for adding or removing variables.
- Units:** A section with a blue header. It includes a 'Dependent variable quantity' dropdown menu set to 'Dimensionless (1)', a 'Source term quantity' dropdown menu set to 'None', and a 'Unit:' input field containing 'm^-2'.

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Select Study



Added study:

Added physics interfaces:

Physics

Help Cancel Done

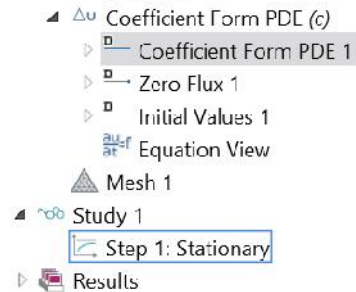
Stationary

The Stationary study is used when field variables do not change over time.

Examples: In electromagnetics, it is used to compute static electric or magnetic fields, as well as direct currents. In heat transfer, it is used to compute the temperature field at thermal equilibrium. In solid mechanics, it is used to compute deformations, stresses, and strains at static equilibrium. In fluid flow it is used to compute the steady flow and pressure fields. In chemical species transport, it is used to compute steady-state chemical composition in steady flows. In chemical reactions, it is used to compute the chemical composition at equilibrium of a reacting system.

It is also possible to compute several solutions, such as a number of load cases, or to track the nonlinear response to a slowly varying load.

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL



Show equation assuming:
Study 1, Stationary

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + a u = f$$
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

Diffusion Coefficient

c 1

Absorption Coefficient

a 0 1/m^2

Source Term

f 1 1/m^2

Mass Coefficient

e_a 0 s^2/m^2

Damping or Mass Coefficient

d_a 1 s/m^2

$$\nabla \cdot (-c \nabla u - r u + x) + s \cdot \nabla u + a u = f$$

Ecuación genérica que resolverá el COMSOL

$$e_a = d_a = 0$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Queremos resolver

Ec. Dif

TE

$$\partial_x \left(\frac{1}{\tilde{r}(x)} \partial_x E_z \right) + k_0^2 \left(v_r(x) - \frac{1}{\tilde{r}(x)} \sin^2(\theta) \right) E_z = 0$$

Comparando con la ecuación del COMSOL:

$$r = x = s = f = 0 \quad \nabla \cdot (-c \nabla u - r u + x) + s \cdot \nabla u + a u = f$$



$$-\partial_x (c \partial_x u) + a u = 0$$

Identificamos:

$$c = \frac{1}{\tilde{r}}$$

$$a = -k_0^2 \left(v_r - \frac{1}{\tilde{r}} \sin^2(\theta) \right)$$

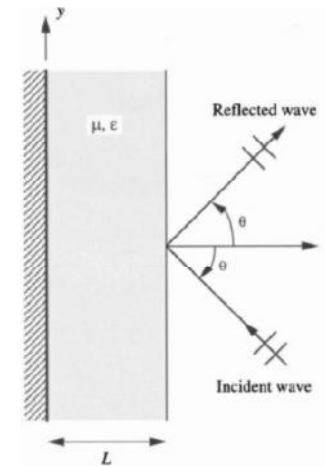
Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

¿Qué ocurre con las condiciones de contorno?

Condiciones de contorno de nuestro problema

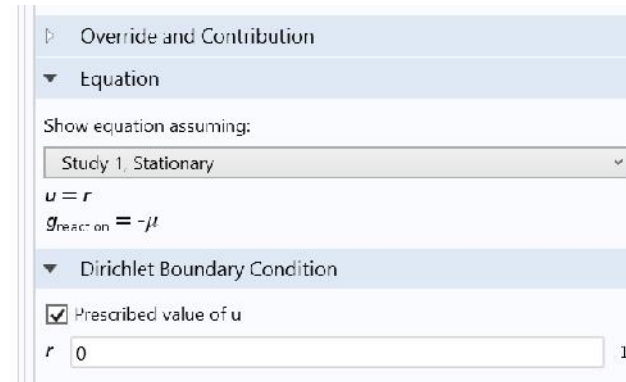
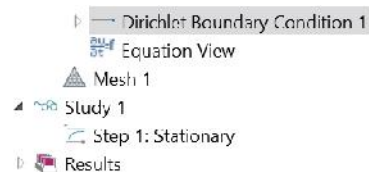
$$E_z|_{x=0} = 0$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{dE_z}{dx} + jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right]_{x=L^-} = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$



En COMSOL

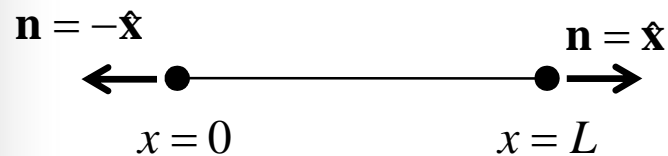
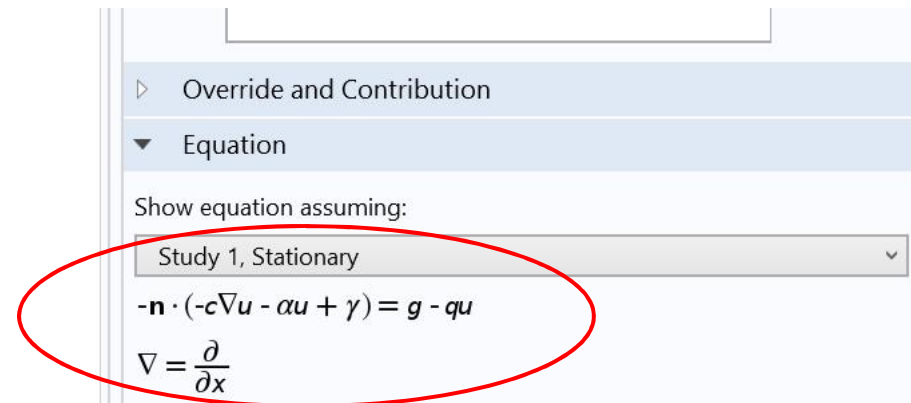
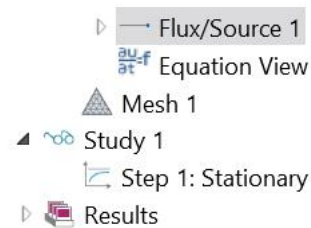
$$E_z|_{x=0} = 0$$



Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

$$\left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{dE_z}{dx} + jk_0 \cos(\theta) E_z(x) \right]_{x=L^-} = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

En COMSOL



$$\left[c \partial_x u + qu \right]_{x=L^-} = g$$

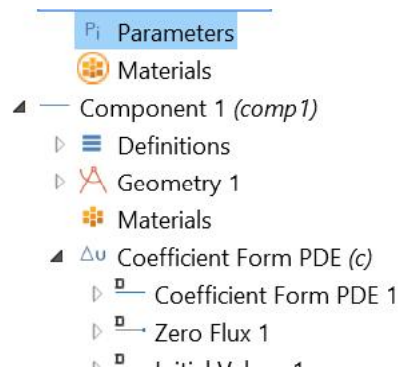
Identificamos:

$$q = jk_0 \cos(\theta)$$

$$g = 2jk_0 \cos(\theta) E_0$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Algunos pasos



Name	Expression	Value	Description
L	5	5	
k0	2*pi	6.2832	
theta	60	60	
thetaR	theta [deg]	1.0472 rad	
mur	2-0.1*i	2-0.1i	
E0	1	1	

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

The image shows the COMSOL Model Builder interface. The left pane, titled 'Model Builder', displays a tree view of the model structure. The right pane, titled 'Settings', shows the configuration for an analytic plot.

Model Builder Tree View:

- Lamina_1D_TE.mph (root)
 - Global Definitions
 - Parameters
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - permitividad (epsr)
 - View 1
 - Geometry 1
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Dirichlet Boundary Condition 1
 - Flux/Source 1
 - Equation View
 - Mesh 1
 - Study 3
 - Parametric Sweep
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
 - Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - R

Settings

Analytic

Plot Create Plot

Label: permitividad

Function name: epsr

Definition

Expression: $4+(2-0.1*i)*(1-(x/L))^2$

Arguments: x

Derivatives: Automatic

Periodic Extension

Units

Arguments:

Function:

Advanced

Plot Parameters

Argument	Lower limit	Upper limit
x	0	5

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

The screenshot displays the COMSOL Model Builder interface. On the left, the 'Model Builder' tree shows the project structure for 'Lamina_1D_TE.mph'. The 'Interval 1 (i1)' object is selected under 'Geometry 1'. On the right, the 'Settings' panel for 'Interval' is visible. It includes options for 'Build Selected' and 'Build All Objects', a 'Label' field set to 'Interval 1', and a section for 'Interval' with 'Number of intervals' set to 'One', 'Left endpoint' set to '0', and 'Right endpoint' set to 'L'. The 'Selections of Resulting Entities' section has 'Create selections' unchecked and 'Contribute to' set to 'None'.

Model Builder

- Lamina_1D_TE.mph (root)
 - Global Definitions
 - Parameters
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - permitividad (*epsr*)
 - View 1
 - Geometry 1
 - Interval 1 (*i1*)
 - Form Union (*fin*)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (*c*)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1

Settings

Interval

Build Selected Build All Objects

Label: Interval 1

Interval

Number of intervals: One

Left endpoint: 0 m

Right endpoint: L m

Selections of Resulting Entities

Create selections

Contribute to: None New

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

The screenshot displays the COMSOL Multiphysics software interface, showing the Model Builder, Settings, and Graphics windows.

Model Builder: The tree view shows the following structure:

- Lamina_1D_TEMph (out)
- Global Definitions
 - Parameters
 - Materials
- Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - permitividad (eps)
 - View 1
 - Geometry 1
 - Interval 1 (i1)
 - Form Union (fin)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1**
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Dirichlet Boundary Condition 1
 - Flux/Source 1
 - Equation View
 - Mesh 1
- Study 3
 - Parametric Sweep
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
- Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - R
 - Tables
 - Table 1

Settings: The settings for the selected **Coefficient Form PDE 1** are shown:

- Label: Coefficient Form PDE 1
- Domain Selection: Selection: All domains
- Active: 1
- Override and Contribution: (Expanded)
- Equation: Show equation assuming: Study 3, Stationary
- Equation:
$$e_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f$$
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$
- Diffusion Coefficient: c = 1/mur
- Absorption Coefficient: a = -k0^2*(eps(x)-(1/mur)*sin(thetaR)^2)

Graphics: The Graphics window shows a horizontal blue line representing the domain, with a scale from 0 to 5.

Messages: The Messages window displays the following information:

- COMSOL 5.1.0.145
- License will expire in 10 days.
- Opened file: Lamina_1D_TEMph
- Number of degrees of freedom solved for: 2001 (plus 2 internal DOFs).

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

The screenshot displays the COMSOL Multiphysics software interface, showing the Model Builder, Settings, and Graphics windows for a 1D problem.

Model Builder: The left pane shows the project hierarchy for "Lamina_1D_TF.mph (root)". Key elements include:

- Global Definitions
- Parameters
- Materials
- Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - permittividad (ϵ_{ps})
 - View 1
 - Geometry 1
 - Interval 1 (\tilde{x})
 - Form Union (fin)
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Dirichlet Boundary Condition 1
 - Flux/Source 1** (selected)
 - Equation View
 - Mesh 1
 - Study 3
 - Parametric Sweep
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
 - Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - R
 - Tables

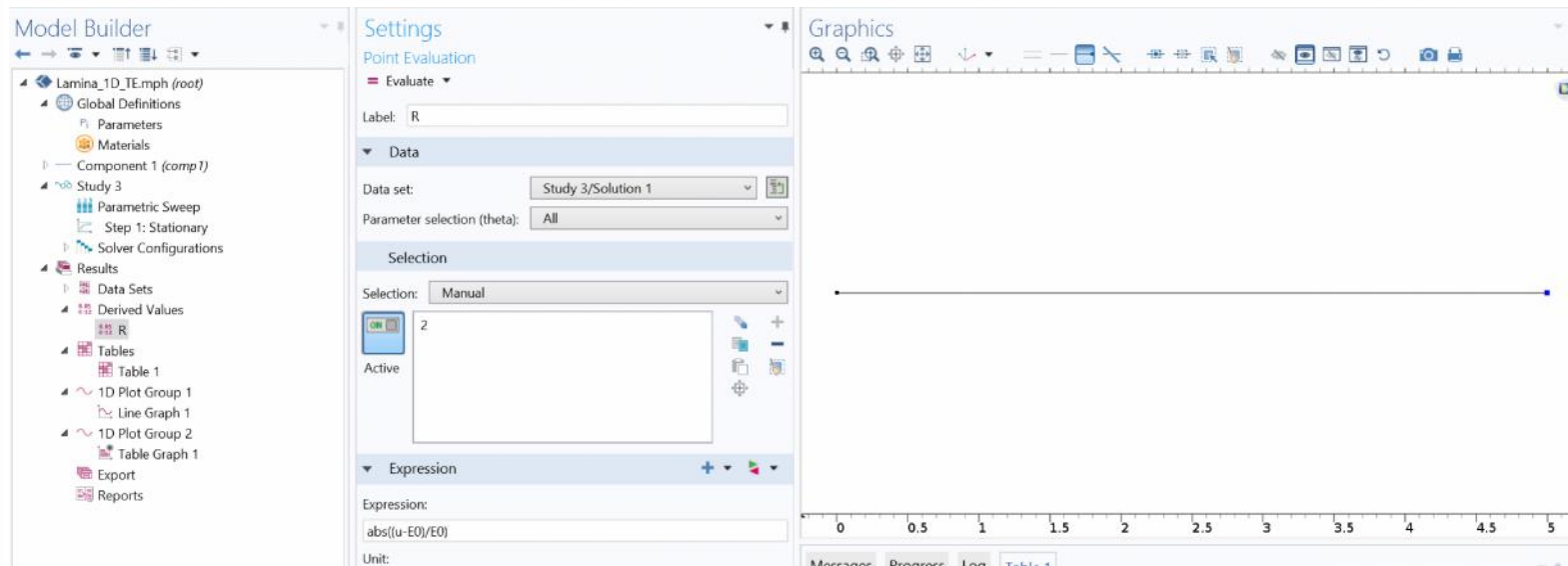
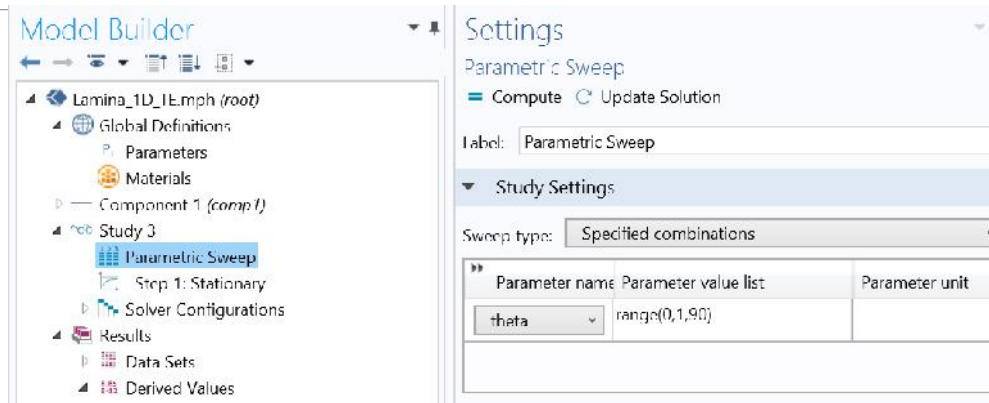
Settings: The central pane shows the settings for the selected "Flux/Source" feature.

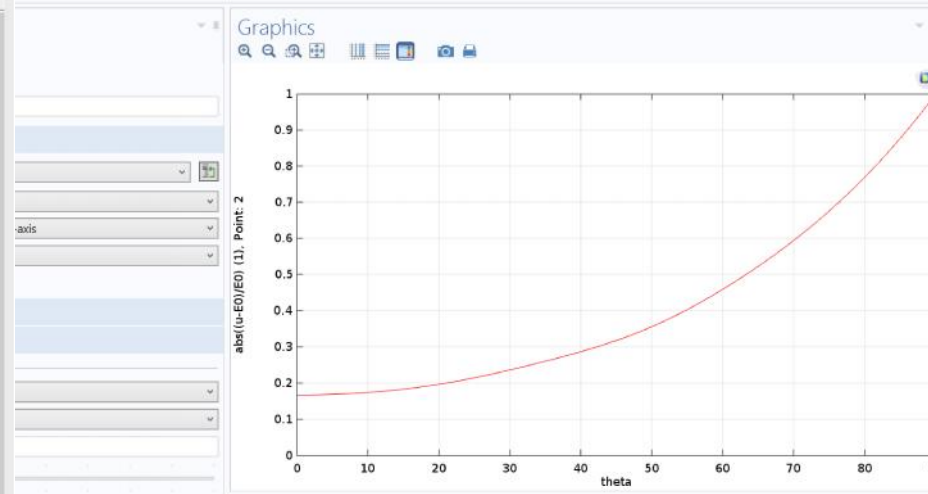
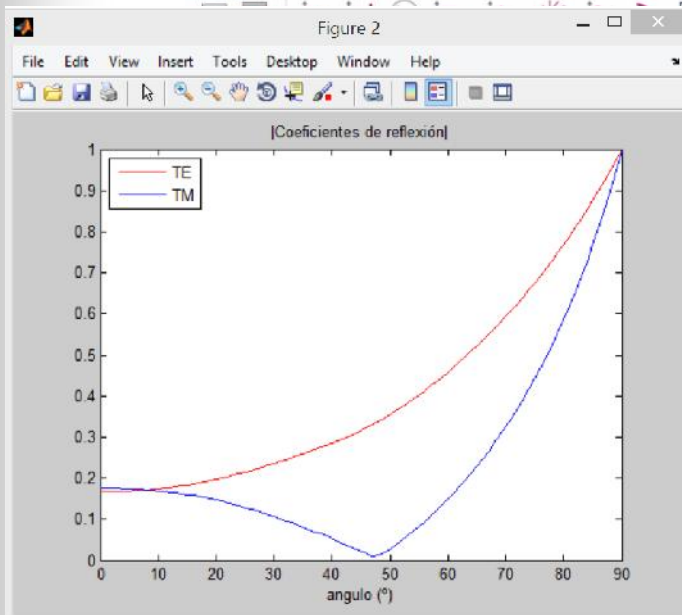
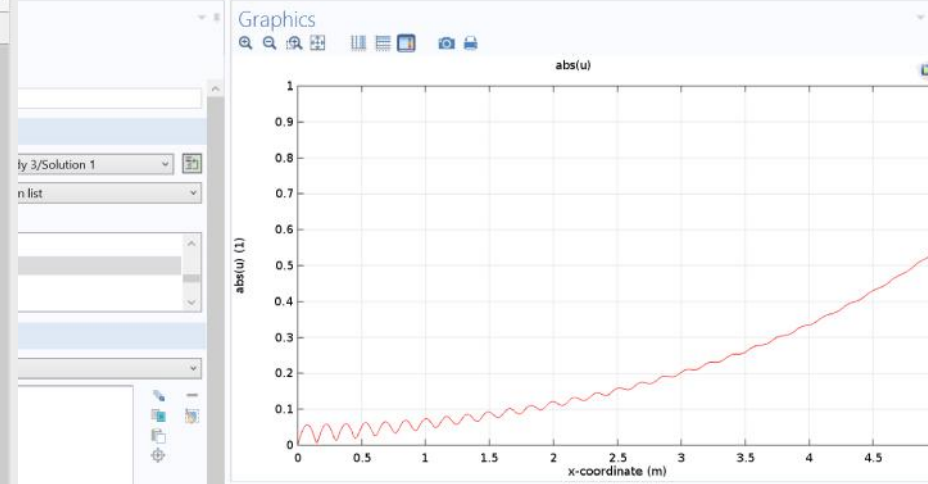
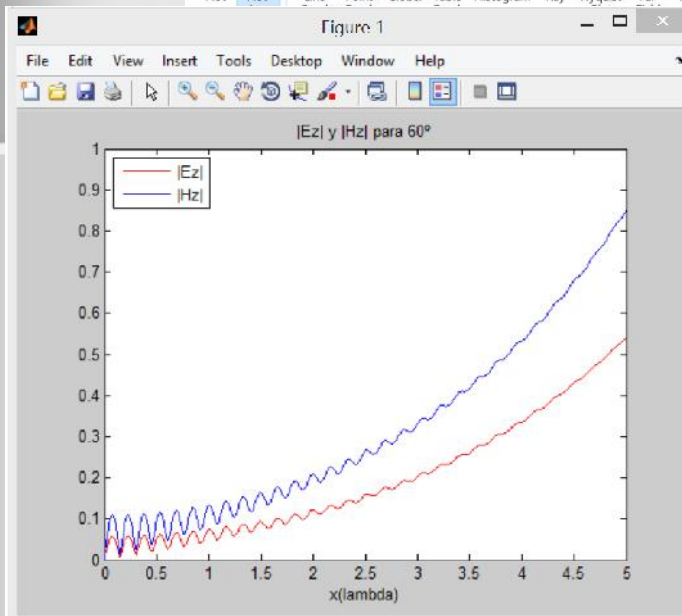
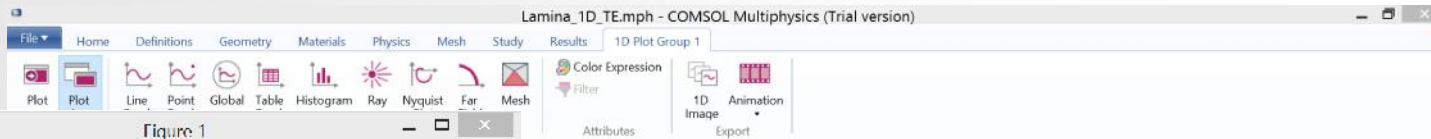
- Label: Flux/Source 1
- Boundary Selection
 - Selection: Manual
 - Active: 2
- Override and Contribution
- Equation
 - Show equation assuming: Study 3, Stationary
 - Equation: $-\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u - au + \gamma) = g - qu$
 - Gradient: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$
- Boundary Flux/Source
 - g: $2 * k_0 * \cos(\theta_{etaR}) * E_0$ (1/m)
- Boundary Absorption/Impedance Term
 - q: $i * k_0 * \cos(\theta_{etaR})$ (1/m)

Graphics: The right pane shows a 1D coordinate system with a horizontal axis ranging from 0 to 5. The axis has major ticks every 0.5 units. Below the axis is a Messages/Progress/Log/Table 1 panel. The Messages panel displays the following text:

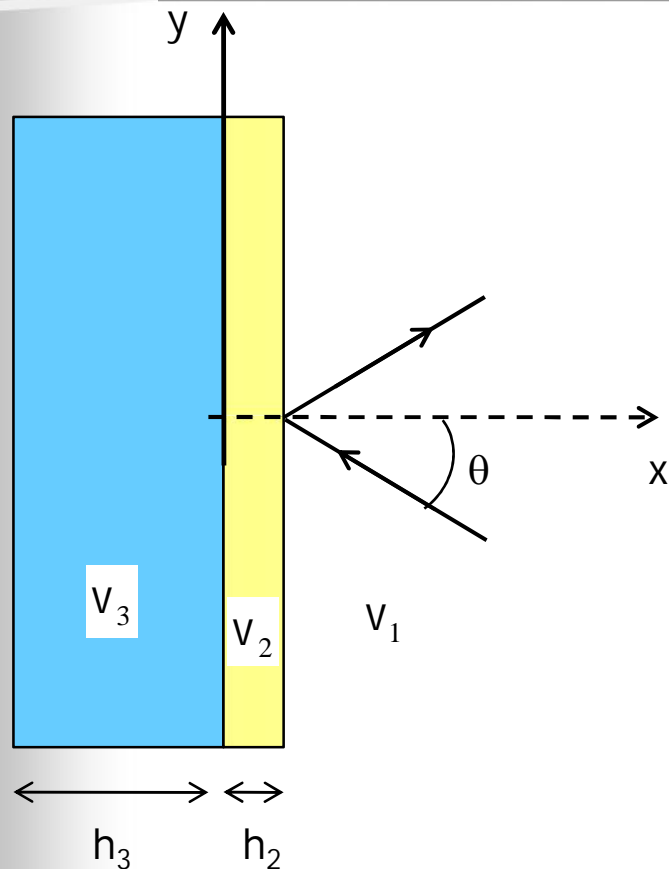
COMSOL 5.1.0.145
License will expire in 10 days.
Opened file: Lamina_1D_TF.mph

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL





Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL



TM

$$\mathbf{H} = H_z(x, y) e^{j\tilde{s}t} \hat{z}$$

$$\partial_x \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_x H_z \right) + \partial_y \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_y H_z \right) + k_0^2 \tilde{v}_r H_z = 0$$

$$H_z(x, y) = \left(H_0 e^{jk_0(x-h_2)\cos(\theta)} + R \cdot H_0 e^{-jk_0(x-h_2)\cos(\theta)} \right) e^{-jk \sin(\theta)y}$$

para $x > h_2$

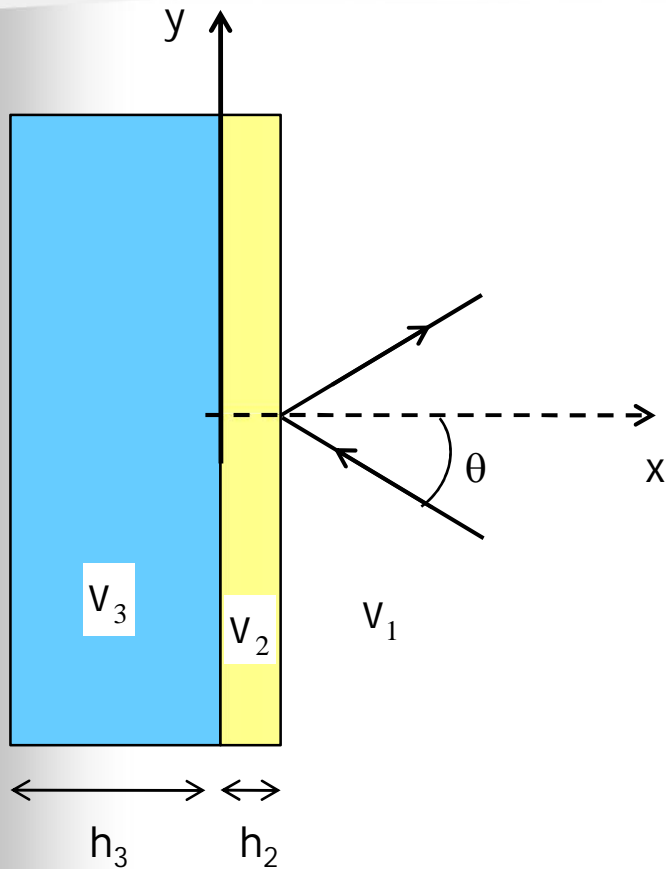
$$k_1 = k_0 \sqrt{\tilde{v}_{r1} V_{r1}}$$

$$k_{1y} = k_1 \sin(\theta)$$

$$k_{1x} = \sqrt{k_1^2 - k_{1y}^2} = k_1 \cos(\theta)$$

$$H_z(x, y) = \left(H_0 e^{jk_{1x} \cdot (x-h_2)} + R \cdot H_0 e^{-jk_{1x} \cdot (x-h_2)} \right) e^{-jk_{1y} \cdot y}$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL



k_t se conserva: k_{1y}

$$\partial_x \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_x H_z \right) + \partial_y \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_y H_z \right) + k_0^2 \sim_r H_z = 0$$



$$\partial_x \left(\frac{1}{v_r(x)} \partial_x H_z \right) + \left(k_0^2 \sim_r - \frac{k_{1y}}{v_r(x)} \right) H_z = 0$$

En COMSOL

$$-\partial_x (c \partial_x u) + a u = 0$$

Identificamos:

$$u = H_z \quad c = \frac{1}{v_r}$$

$$a = - \left(k_0^2 \sim_r - \frac{k_{1y}}{v_r} \right)$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Respecto a las condiciones de Frontera

En las interiores el COMSOL aplica:

$$\mathbf{n} \cdot ([c\nabla u - ru + x]_1 - [c\nabla u - ru + x]_2) = 0$$

Esto hace que las integrales de contorno internas se anulen (Condición Natural)

En este caso eso implica:

$$\left[\frac{1}{v_r} \partial_x H_z \right]_1 = \left[\frac{1}{v_r} \partial_x H_z \right]_2$$

Que no es más que exigir la continuidad de E_y

$$\left[\frac{1}{v_r} \partial_x H_z \right] = j\check{S}v_0 E_y$$

Además por construcción H_z es continua en los nodos

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Ahora aplicaremos condiciones mixtas en ambos extremos , 1^{er} ($x=-h_3$) y último nodo ($x=h_2$)

$$\text{En } x=h_2 \quad H_z(x, y) = \left(H_0 e^{jk_{1x} \cdot (x-h_2)} + R \cdot H_0 e^{-jk_{1x} \cdot (x-h_2)} \right) e^{-jk_{1y} \cdot y}$$

$$\frac{dH_z}{dx} = jk_{1x} \left[H_0 e^{jk_{1x} \cdot (x-h_2)} - R \cdot H_0 e^{-jk_{1x} \cdot (x-h_2)} \right] e^{-jk_{1y} \cdot y}$$

Se puede escribir:

$$\frac{dH_z}{dx} + jk_{1x} H_z = 2jk_{1x} H_0 e^{jk_{1x} \cdot (x-h_2)} e^{-jk_{1y} \cdot y}$$

En $x = h_2^+$

$$\left[\frac{dH_z}{dx} + jk_{1x} H_z \right]_{x=h_2^+} = 2jk_{1x} H_0$$

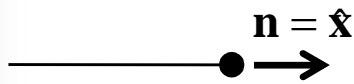
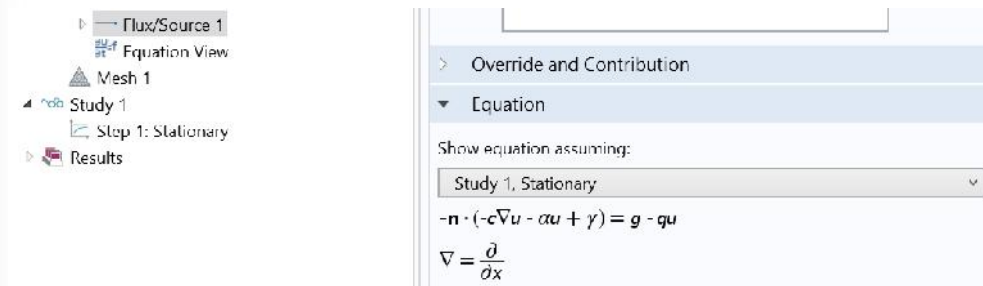
$$H_z \text{ y } \left[\frac{1}{v_r} \partial_x H_z \right] \text{ Son continuas}$$

En $x = h_2^-$

$$\left[\frac{1}{v_2} \frac{dH_z}{dx} + j \frac{k_{1x}}{v_1} H_z \right]_{x=h_2^-} = 2j \frac{k_{1x}}{v_1} H_0$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

En COMSOL



$$-\hat{x} \left[\frac{-1}{V_r} \partial_x H_z + q H_z \right]_{x=h_2^-} = g$$

Identificamos:

$$g = 2j \frac{k_{1x}}{V_{r1}} H_0$$

$$q = j \frac{k_{1x}}{V_{r1}}$$

Queremos que:

En $x = h_2^-$

$$\left[\frac{1}{V_2} \frac{dH_z}{dx} + j \frac{k_{1x}}{V_1} H_z \right]_{x=h_2^-} = 2j \frac{k_{1x}}{V_{r1}} H_0$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

En este extremo pretendemos que la onda pase sin reflejarse ("transparencia")

En h_3

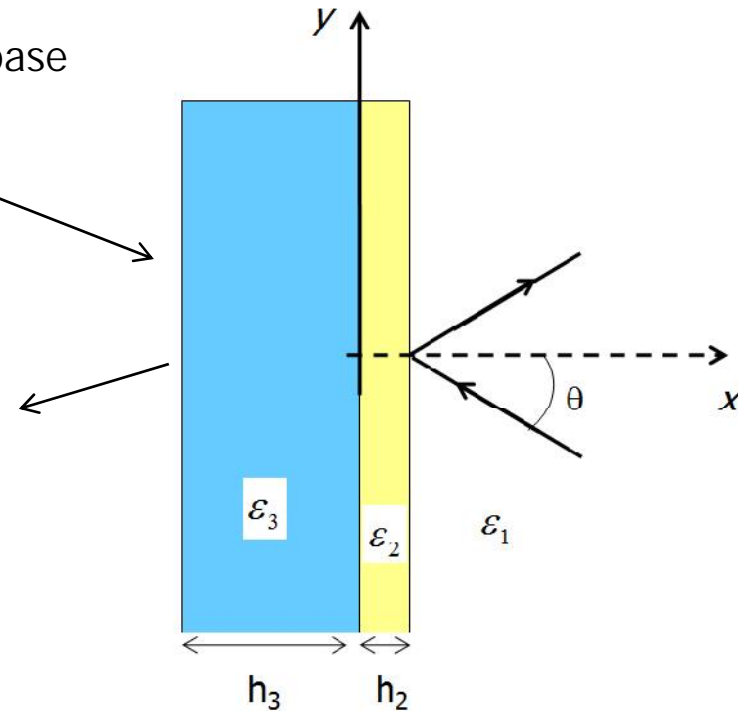
En $x = -h_3$

$$H_z(x, y) = t \cdot H_0 e^{jk_{3x}(x-h_2)} e^{-jk_{3y} \cdot y} e^{\{}$$

{ : fase acumulada

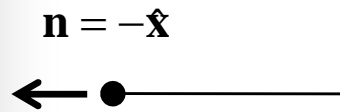
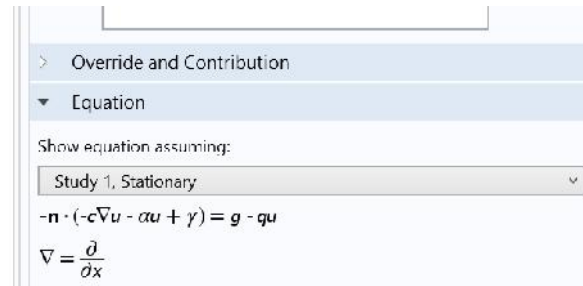
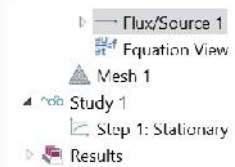
$$\frac{dH_z}{dx} = jk_{3x} H_z$$

$$\left[\frac{dH_z}{dx} - jk_{3x} H_z \right]_{x=-h_3^+} = 0$$



Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

En COMSOL



$$\hat{x} \left[\frac{-1}{V_r} \partial_x H_z + q H_z \right]_{x=-h_3^+} = g$$

Identificamos:

$$g = 0$$

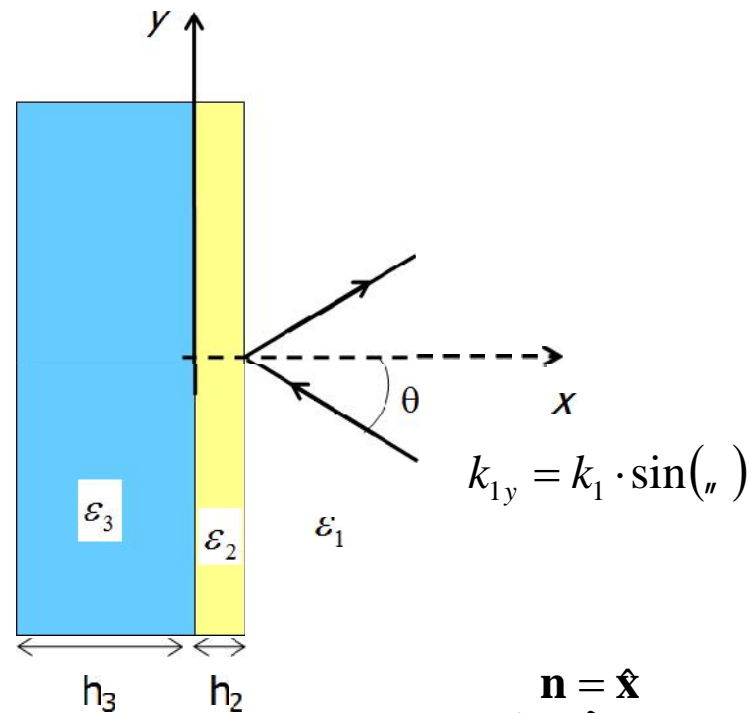
$$q = j \frac{k_{3x}}{V_{r3}}$$

Queremos que:

$$\left[\frac{dH_z}{dx} - jk_{3x} H_z \right]_{x=-h_3^+} = 0$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Veamos un ejemplo concreto



$$\lambda_0 = 550 \text{ nm}$$

$$v_1 = 4$$

$$v_2(\text{Ag}) = -12.922 - 0.477 \cdot i$$

$$v_3 = 2.25$$

$$\tilde{r} = 1$$

$$h_2 = 50 \text{ nm}$$

$$h_3 = 200 \text{ nm}$$

$$\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{x}}$$



$$g = 0$$

$$q = j \frac{k_{3x}}{v_{r3}}$$

$$u = H_z \quad c = \frac{1}{v_r}$$

$$a = -\left(k_0^2 \tilde{r} - \frac{k_{1y}}{v_r} \right)$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$$

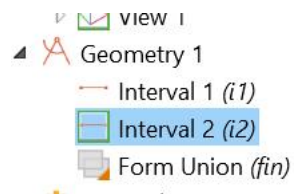


$$g = 2j \frac{k_{1x}}{v_{r1}} H_0$$

$$q = j \frac{k_{1x}}{v_{r1}}$$

Problema 1D: Resolución empleando el COMSOL

Name	Expression	Value	Description
lmb	550 [nm]	5.5E-7 m	
eps1	4	4	
eps2	-12.922-0.477*i	-12.922-0.477i	
eps3	2.25	2.25	
mur	1.0	1	
h2	50 [nm]	5E-8 m	
h3	200 [nm]	2E-7 m	
k0	$2 \cdot \pi / lmb$	1.1424E7 1/m	
k1	$k0 \cdot \sqrt{mur \cdot eps1}$	2.2848E7 1/m	
k2	$k0 \cdot \sqrt{mur \cdot eps2}$	(7.5782E5-4.1...	
k3	$k0 \cdot \sqrt{mur \cdot eps3}$	1.7136E7 1/m	
theta	30	30	
thetaR	theta [deg]	0.5236 rad	
k1y	$k1 \cdot \sin(thetaR)$	1.1424E7 1/m	
k1x	$\sqrt{k1^2 - k1y^2}$	1.9787E7 1/m	
k3y	k1y	1.1424E7 1/m	
k3x	$\text{if}(k3^2 - k3y^2 < 0, -\sqrt{k3^2 - k3y^2}, \sqrt{k3^2 - k3y^2})$	1.2772E7 1/m	
H0	1	1	



Left endpoint: m

Right endpoint: m

▼ Selections of Resulting Entities

- plasmon_TM_3valperdidas.mph (root)
 - Global Definitions
 - Parameters
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - Geometry 1
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Flux/Source 1
 - Flux/Source 2
 - Coefficient Form PDE 2
 - Mesh 1
 - Study 3
 - Parametric Sweep
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
 - Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - Tables
 - 1D Plot Group 1
 - 1D Plot Group 2
 - Table Graph 1
 - Export
 - Reports

Label: Coefficient Form PDE 2

Domain Selection

Selection: Manual

Active: 2

Override and Contribution

Equation

Show equation assuming: Study 3, Stationary

$$e_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_s \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \mathbf{a} u = f$$

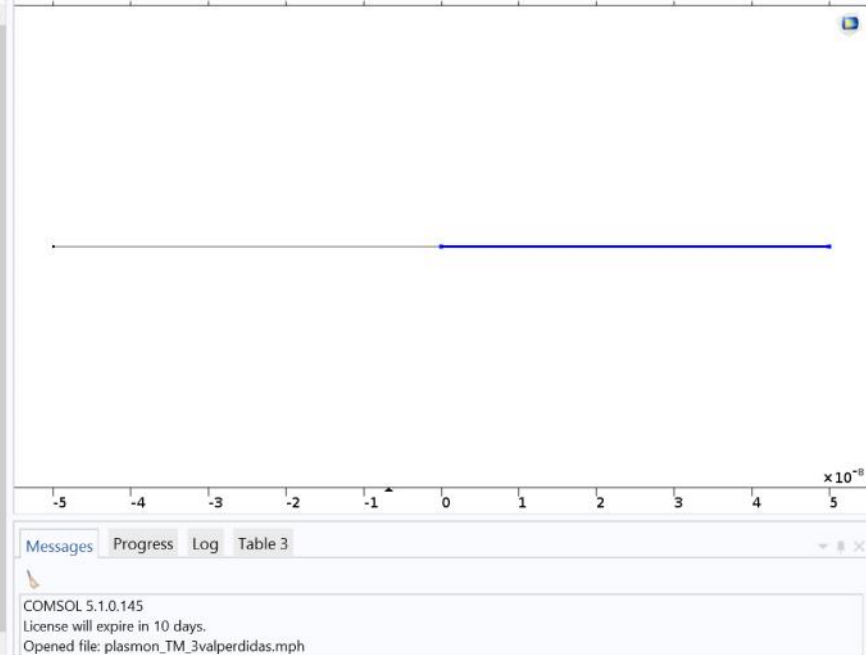
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

Diffusion Coefficient

c: 1/eps2 1

Absorption Coefficient

a: $-(k_0^2 \cdot \text{mur} - (k_y^2 / \text{eps2}))$ 1/m²



- plasmon_TM_3valperdidas.mph (root)
 - Global Definitions
 - Parameters
 - Materials
 - Component 1 (comp1)
 - Definitions
 - Geometry 1
 - Materials
 - Coefficient Form PDE (c)
 - Coefficient Form PDE 1
 - Zero Flux 1
 - Initial Values 1
 - Flux/Source 1
 - Flux/Source 2
 - Coefficient Form PDE 2
 - Mesh 1
 - Study 3
 - Parametric Sweep
 - Step 1: Stationary
 - Solver Configurations
 - Results
 - Data Sets
 - Derived Values
 - Tables
 - 1D Plot Group 1
 - 1D Plot Group 2
 - Table Graph 1
 - Export
 - Reports

Label: Coefficient Form PDE 1

Domain Selection

Selection: All domains

Active: 1, 2 (overridden)

Override and Contribution

Equation

Show equation assuming: Study 3, Stationary

$$e_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_s \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \mathbf{a} u = f$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

Diffusion Coefficient

c: 1/eps1 1

Absorption Coefficient

a: $-(k_0^2 \cdot \text{mur} - (k_y^2 / \text{eps1}))$ 1/m²

